No. of Printed Pages : 10 **MTE-02**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination
June, 2023

MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) Question No. **7** is **compulsory**.*

*(ii) Answer any **four** questions from Q. No. **1** to Q. No. **6**.*

*(iii) Use of calculator is **not** allowed.*

1. (a) Define a surjective map. Give an example of a map that is not surjective. 2

(b) Check that $S = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ is a set of orthonormal basis in $\mathbf{R}^2$. Write $(1, 3)$ as a linear combination of the vectors in S. 4

(c) Let $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ be defined by $T(x, y) = (2x + y, 2y)$. Check that T satisfies the polynomial $(x-2)^2$. 2

(d) State the Cauchy-Schwarz inequality for inner product space. Verify the inequality for the vectors $v = (-1, -1, -2)$ and $w = (-1, 1, -3)$. 2

2. (a) Check whether $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ is an eigen vector for $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. What is the corresponding eigen vector ? 2

(b) Find the adjoint of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Hence find its inverse. 3

(c) Find the minimal polynomial of $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. 3

(d) If the vectors v_1, v_2, v_3 are linearly independent, check that the vectors $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3$ are also linearly independent. 2

3. (a) Let $\mathbf{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ be an ordered basis of $\mathbf{R}^3$. Let S and T be linear operators on $\mathbf{R}^3$ given by $S(u_1) = u_2, S(u_2) = u_3, S(u_3) = u_1 - u_2$ and $T(u_1) = u_1 + u_2$, $T(u_2) = u_2$, $T(u_3) = u_1 - u_3$. Find the matrix of S o T with respect to **B**. Also find the rank of S o T. 5

(b) Prove that the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ is diagonalizable. Find an invertible matrix P so that $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 5

4. (a) Let $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, -2), (-1, -1, 0)\}$ be a basis of $\mathbf{R}^3$. Find the dual basis of B. 5

(b) Use Cayley-Hamilton theorem to compute A^{-1}, where $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. 5

5. (a) Show that the set $\{(2, 2 - 1), (2, -1, 2)\}$ is linearly independent over $\mathbf{R}^3$. Complete this set to a basis of $\mathbf{R}^3$. Convert this basis to an orthonormal basis with respect to the standard inner product using Gram-Schmidt procedure. 5

(b) Consider the real vector space :

$$W = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}\}$$

Check whether or not W_1 and W_2 are subspaces of W, where :

$$W_1 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0 = a_2, \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}\}$$

and

$$W_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0 - a_1 + a_2 = 1, \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}\}$$

Further, for those that are subspaces of W, also find their dimensions. 5

6. (a) Let $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$. Show that $\mathbf{R}^+$ is a real vector space with respect to $\oplus$ and $\odot$ defined by $a \oplus b = ab$ and $\alpha \odot a = a^\alpha \ \forall a, b \in \mathbf{R}^+$ and $\alpha \in \mathbf{R}$. 5

(b) Find the orthogonal canonical reduction of the quadratic form $Q = 3x^2 + 2y^2 - 2\sqrt{2}\,xy$. Also give its principal axes. Finally, draw a rough sketch of the orthogonal canonical reduction of $Q = 4$. 5

7. Which of the following statements are true and which are false ? Give reasons for your answers : 10

(a) Every subset of a linearly dependent set is linearly dependent.

(b) The number subspace of $\mathbf{R}^2$ over $\mathbf{R}$ is infinite.

(c) If $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, is defined by $T(x, y) = (y, 0)$, then Range (T) = Ker (T).

(d) If the row reduced form of A is $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, then $\det(A) \neq -1$.

(e) There is a linear operator $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ with characteristic polynomial $(x-1)(x-2)(x-3)$ and minimal polynomial $(x-1)(x-2)$.

MTE-02

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2023

एम.टी.ई.-02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i) प्रश्न सं* ***7 अनिवार्य*** *है।*

*(ii) प्रश्न सं. **1** से **6** तक से किन्हीं* **चार** *प्रश्नों के उत्तर लिखिए।*

(iii) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) आच्छादक फलन को परिभाषित कीजिए। एक फलन का उदाहरण दीजिए जो आच्छादक न हो। 2

(ख) जाँच कीजिए कि

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

$\mathbf{R}^2$ का एक प्रसामान्य लांबिक आधार है। (1, 3) को S को सदिशां क एकघात संचय क रूप में लिखिए। 4

(ग) माना $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ निम्न द्वारा परिभाषित है :

$$T(x, y) = (2x + y, 2y)$$

परीक्षण कीजिए कि T बहुपद $(x-2)^2$ को संतुष्ट करता है। 2

(घ) एक आंतर गुणनफल समष्टि पर कौशो–श्वार्ज असमिका बताइए। सदिश $v = (-1, -1, -2)$ और $w = (-1, 1, -3)$ के लिए असमिका सत्यापित कीजिए। 2

2. (क) जाँच कीजिए कि $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ के लिए एक आइगेन सदिश है। संगत आइगेन मान क्या है ? 2

(ख) आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ का सहखण्डज निकालिए। इससे आव्यूह का व्युत्क्रम निकालिए। 3

(ग) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ का अल्पिष्ट बहुपद निकालिए। 3

(घ) यदि सदिश v_1, v_2, v_3 रैखिकतः स्वतन्त्र हं, तो जाँच कीजिए कि $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3$ भी रैखिकतः स्वतन्त्र हैं। 2

3. (क) मान लीजिए $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ $\mathbf{R}^3$ का एक क्रमित आधार है। मान लीजिए S और T $\mathbf{R}^3$ पर रैखिक संकारक हैं जो $S(u_1) = u_2, S(u_2) = u_3, S(u_3) = u_1 - u_2$ और $T(u_1) = u_1 + u_2, T(u_2) = u_2, \ T(u_3) = u_1 - u_3$ द्वारा परिभाषित हैं। B के सापेक्ष $S o T$ का आव्यूह निकालिए। $S o T$ की जाति भी निकालिए। 5

(ख) दिखाइए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ विकर्णनीय है। एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह P निकालिए जिससे $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$। 5

4. (क) मान लीजिए $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, -2), (-1, -1, 0)\}$ $\mathbf{R}^3$ का आधार है। B का द्वैत आधार निकालिए। 5

(ख) कैली-हेमिल्टन प्रमेय का प्रयोग करके A^{-1} निकालिए, जहाँ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$। 5

5\. (क) दिखाइए कि समुच्चय $\{(2, 2-1), (2, -1, 2)\}$ $\mathbf{R}^3$ पर रैखिकतः स्वतन्त्र है। इसका पूरा करके $\mathbf{R}^3$ का एक आधार बनाइए। ग्राम–श्मिट विधि का प्रयोग करके इस आधार को मानक आन्तर गुणनफल के सापेक्ष प्रसामान्य लांबिक आधार क रूप में परिवर्तित कीजिए। 5

(ख) वास्तविक सदिश समष्टि

$$W = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}\}$$

लीजिए। जाँच कीजिए कि W_1 और W_2 उपसमष्टियाँ हैं W की, जहाँ

$$W_1 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0 = a_2, \; a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}\}$$

और

$$W_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0 - a_1 + a_2 = 1, \; a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}\}$$

आगे, जो उपसमष्टियाँ हैं उनकी विमा निकालिए। 5

6\. (क) माना $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$। दिखाइए कि $\mathbf{R}^+$ $\oplus$ और $\odot$ के सापेक्ष $\mathbf{R}^+$ एक वास्तविक सदिश समष्टि है, जहाँ $\oplus$ और $\odot$ $\forall a, b \in \mathbf{R}^+$ के लिए $a \oplus b = ab$ और $\alpha \odot a = a^\alpha$ द्वारा परिभाषित हैं। 5

(ख) द्विघाती समघात $Q = 3x^2 + 2y^2 - 2\sqrt{2}\,xy$ का लांबिक विहित समानयन निकालिए। मुख्य अक्ष भी निकालिए। अंततः $Q = 4$ के लांबिक विहित समानयन का स्थूल चित्र भी बनाइए। 5

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए : 10

(क) एक रैखिकतः स्वतन्त्र समुच्चय का प्रत्येक उपसमुच्चय भी रैखिकतः स्वतन्त्र होता है।

(ख) यदि $\mathbf{R}$ पर $\mathbf{R}^2$ की उपसमष्टियों की संख्या अनन्ततः अनेक हैं।

(ग) यदि $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ $T(x, y) = (y, 0)$ से परिभाषित है, तो परिसर $(T) =$ अष्टि (T)।

(घ) यदि A का पंक्ति समानीत रूप $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो $\det(A) \neq -1$।

(ङ) एक रैखिक रूपान्तरण $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ होता है जिसके लिए अभिलाक्षणिक बहुपद $(x-1)(x-2)(x-3)$ है और अल्पिष्ट बहुपद $(x-1)(x-2)$ है।