No. of Printed Pages : 12

BMTE-144

BACHELOR OF SCIENCE/ARTS (GENERAL) (BSCG/BAG)

Term-End Examination

June, 2023

BMTE-144 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : (i) *Question No. 1 is compulsory.*

(ii) *Do any six questions from Question nos. 2 to 8.*

(iii) *Use of non-programmable scientific calculator is allowed.*

1. State whether the following statements are true *or* false. Give a short proof or a counter-example in support of your answer : 10

(i) $\Delta + \nabla = \frac{\Delta}{\nabla} - \frac{\nabla}{\Delta}$

(ii) For the function $f(x) = \frac{1}{x}$, the second order divided difference based on the points x_0, x_1, x_2 is $f[x_0, x_1, x_2] = x_0\, x_1\, x_2$.

(iii) In the Taylor series expansion for the function $f(x) = x^{5/2}$ in [–1, 1] about $x = 0$, the bounds of the error $R_3(x)$ exists.

(iv) The interval [– 1, 1] contains all the eigen values of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

(v) The order of convergence of Newton-Raphson method is 2.

2. (a) Find an interval of unit length which contains the smallest positive root of the equation $f(x) = x^3 - 5x + 1 = 0$. Taking the end points of this interval as initial approximations, perform two iterations of the secant method. 8

(b) Evaluate the integral $\int_0^1 \frac{dx}{3+2x}$ using Trapezoidal rule with 2 and 4 subintervals. Determine the minimum number of subintervals required if the error in magnitude is less than 0.002. 7

3. (a) Perform three iterations of the Gauss-Seidel iteration method to solve the system of equations : 8

$$4x + 2z = 6$$

$$5y + 2z = -3$$

$$5x + 4y + 10z = 11$$

Take the initial approximation as $(1.5, -0.6, 1.1)^T$.

(b) Using divided difference, show that the data : 7

x	$f(x)$
-3	18
-2	12
-1	8
1	6
2	8
3	12

represent a second degree interpolating polynomial. Hence, obtain the polynomial.

4. (a) Find an approximate value of $y(1.2)$ for the initial value problem : 8

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 2y^2, \quad y(1) = 1,$$

using the classical Runge-Kutta fourth order method with $h = 0.1$.

(b) Prove that :

$$\mu = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\delta^2},$$

where δ is the central difference operator and μ is the mean operator. 7

5. (a) Using Taylor series third order method, solve the initial value problem : 8

$$\frac{dy}{dx} = x + y^2, \quad y(0) = 1$$

upto $x = 0.4$ with $h = 0.2$.

(b) The solution of the system of equations $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ is attempted by the Gauss-Jacobi and Gauss-Seidel iteration scheme. Set up the two schemes in the matrix form. Will the iteration scheme converge ? Justify your answer. 7

6. (a) Solve the system of equations : 8

$$4x + y + z = 4$$

$$x + 4y - 2z = 4$$

$$3x + 2y - 4z = 6$$

using LU factorization method. Take the diagonal elements of U as 1.

(b) The equation $f(x) = 18x^3 - 33x^2 + 2x + 5 = 0$ has 3 real roots. Find the intervals which contain each of these roots. Perform two iterations of the bisection method to obtain the negative root. 7

7. (a) Find the largest eigen value in magnitude of the matrix : 8

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

using the power method. Take the initial approximation to the eigen vector as $\underset{\sim}{v}^{(o)} = [1\ 1\ 1]^T$ and perform four iterations.

(b) Using Lagrange interpolation and the following data : 7

x	$f(x)$
-3	-29
-1	-1
0	1
2	11

find the approximate value of $f(1)$.

8. (a) Solve the system of equations : 8

$$x + 2y + 3z = 5$$

$$2x + 8y + 22z = 6$$

$$3x + 22y + 82z = -10$$

using Gauss elimination method with pivoting.

(b) The method :

$$x_{n+1} = \frac{1}{9}\left[5x_n + \frac{5N}{x_n^2} - \frac{N^2}{x_n^5}\right], \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

where N is a positive constant, converges to $N^{1/3}$. Find the rate of convergence of the method. 7

BMTE-144

विज्ञान/कला स्नातक (सामान्य)

(बी. एस-सी. जी./बी. ए. जी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2023

बी.एम.टी.ई.-144 : सांख्यिकी विश्लेषण

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *(i) प्रश्न संख्या **1** अनिवार्य है।*

*(ii) प्रश्न संख्या **2** से **8** तक कोई **छः** प्रश्न कीजिए।*

(iii) अप्रोग्रामनीय व वैज्ञानिक कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति है।

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर के पक्ष में संक्षिप्त उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए : 10

(i) $\Delta + \nabla = \frac{\Delta}{\nabla} - \frac{\nabla}{\Delta}$

(ii) $f(x) = \frac{1}{x}$ के द्वारा परिभाषित फलन के लिए बिन्दुओं x_0, x_1, x_2 पर आधारित द्वितीय कोटि विभाजित अन्तर $f[x_0, x_1, x_2] = x_0\, x_1\, x_2$ है।

(iii) $x = 0$ के प्रति अन्तराल $[-1, 1]$ में फलन $f(x) = x^{5/2}$ के टेलर श्रेणी प्रसार में त्रुटि $R_3(x)$ के परिबन्धों का अस्तित्व है।

(iv) आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ के सभी आइगेन मान अन्तराल $[-1, 1]$ में हैं।

(v) न्यूटन-रैफ्सन विधि की अभिसरण कोटि 2 है।

2. (क) एकक लम्बाई वाला वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जो समीकरण $f(x) = x^3 - 5x + 1 = 0$ के सबसे छोटे धनात्मक मूल को अन्तर्विष्ट करता हो। इस अन्तराल के अन्त्य बिन्दुओं को आदि सन्निकटन मानकर छेदिका विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए। 8

(ख) 2 और 4 उपअन्तराल लेकर समाकलन के समलम्बी नियम द्वारा समाकल $\int_0^1 \frac{dx}{3+2x}$ का

सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। उपअन्तरालों की निम्नतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे कि त्रुटि का परिमाण 0.002 से कम हो। 7

3. (क) समीकरण निकाय : 8

$$4x + 2z = 6$$
$$5y + 2z = -3$$
$$5x + 4y + 10z = 11$$

को हल करने के लिए गाउस-सीडल पुनरावृत्ति विधि की तीन पुनरावृत्तियाँ कीजिए। प्रारम्भिक सन्निकटन को $(1.5, -0.6, 1.1)^T$ लीजिए।

(ख) विभाजित अन्तर का प्रयोग करके दिखाइए कि आँकड़े :

x	$f(x)$
-3	18
-2	12
-1	8
1	6
2	8
3	12

द्वितीय घात अन्तर्वेशन बहुपद को निरूपित करते हैं। अतः बहुपद ज्ञात कीजिए। 7

4. (क) $h = 0.1$ लेकर चतुर्थ कोटि चिरप्रतिष्ठित रुंगे-कुट्टा विधि द्वारा आदि मान समस्या :

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 2y^2, \quad y(1) = 1$$

के लिए $y(1.2)$ का सन्निकट मान प्राप्त कीजिए। 8

(ख) सिद्ध कीजिए कि :

$$\mu = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\delta^2}$$

जहाँ δ केन्द्रीय अन्तर संकारक और μ मध्य संकारक है। 7

5. (क) तृतीय कोटि टेलर श्रेणी विधि द्वारा $h = 0.2$ लेकर $x = 0.4$ तक आदि मान समस्या $\frac{dy}{dx} = x + y^2$, $y(0) = 1$ का हल प्राप्त कीजिए। 8

(ख) गाउस-जैकोबी और गाउस-सीडल पुनरावृत्ति विधियों द्वारा समीकरण निकाय :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

का हल प्राप्त करने का प्रयास किया गया। दोनों विधियों को आव्यूह रूप में स्थापित कीजिए। क्या ये पुनरावृत्ति विधियाँ अभिसरित होती हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 7

6. (क) U के सभी विकर्ण अवयवों को 1 मानकर LU वियोजन विधि द्वारा समीकरण निकाय :

$$4x + y + z = 4$$
$$x + 4y - 2z = 4$$
$$3x + 2y - 4z = 6$$

का हल प्राप्त कीजिए। 8

(ख) समीकरण $f(x) = 18x^3 - 33x^2 + 2x + 5 = 0$ के 3 वास्तविक मूल हैं। प्रत्येक मूल को आविष्ट करने वाले अन्तराल ज्ञात कीजिए। ऋण मूल ज्ञात करने के लिए समद्विभाजन विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए। 7

7. (क) आव्यूह A के लिए परिमाण में वृहत्तम आइगेन मान और संगत आइगन सदिश ज्ञात करने के लिए घात विधि का प्रयोग करके चार पुनरावृत्तियाँ कीजिए, जहाँ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

सन्निकटित आरम्भिक आइगेन सदिश को $\underset{\sim}{v}^{(o)} = [1\ 1\ 1]^T$ लेकर चलिए। 8

(ख) लैग्रांज अन्तर्वेशन और निम्नलिखित आँकड़ों :

x	$f(x)$
– 3	– 29
– 1	– 1
0	1
2	11

का प्रयोग करके $f(1)$ का सन्निकट मान प्राप्त कीजिए। 7

8. (क) कीलकन सहित गाउस विलोपन विधि से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए : 8

$$x + 2y + 3z = 5$$
$$2x + 8y + 22z = 6$$
$$3x + 22y + 82z = -10$$

(ख) विधि

$$x_{n+1} = \frac{1}{9}\left[5x_n + \frac{5N}{x_n^2} - \frac{N^2}{x_n^5}\right],\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

जहाँ N एक धन अचर है, $N^{1/3}$ की ओर अभिसरित होती है। विधि की अभिसरण दर ज्ञात कीजिए। 7