No. of Printed Pages : 16 **BMTE-141**

B. A./B. SC. (GENERAL)

(BAG/BSCG)

Term-End Examination

June, 2023

BMTE-141 : LINEAR ALGEBRA

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : (*i*) *There are eight questions in this paper.*

(*ii*) *The* ***eighth*** *question is compulsory.*

(*iii*) *Do any* ***six*** *questions from Question No. 1 to Question No. 7.*

(*iv*) *Use of calculator is not allowed.*

(*v*) *Do your rough work in a clearly identifiable part of the bottom of the same page or in the side of the page only.*

---

1. (a) Define the adjoint of a matrix. Write down the adjoint of the matrix : 2

$$\begin{bmatrix} 1 & i & -1+i \\ i & 2i & -i \end{bmatrix}$$

(b) Check whether the set of vectors :

$$\left\{\frac{i+k}{\sqrt{2}}, \frac{i-2j+k}{\sqrt{6}}, \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}\right\}$$

is an orthonormal set. 3

(c) Let $A = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ and $B = \{(x, 0, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$. Prove that $A + B = \mathbf{R}^3$. Is $\mathbf{R}^3$ a direct sum of A and B ? Justify your answer. 3

(d) Is the matrix :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

in Row Reduced Echelon form ? Is it in Row Reduced form ? Justify your answer. If it is not in Row Reduced Echelon form, use row operations to reduce it to Row Reduced Echelon form. 3

(e) Find the coordinates of the polynomial $2x^2 - x + 1$ with respect to the ordered basis $\{x, x^2, 1 + x + x^2\}$. 2

(f) Let A be a 4×3 matrix. Write down the elementary matrices with which, when we multiply A on the left, will perform the following row operations on A : 2

(i) $R_1 \leftrightarrow R_3$

(ii) $R_2 \to R_2 - 3R_4$

2. (a) Use Row Reduction to find the rank and the nullity of the matrix : 5

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \\ -3 & 5 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

(b) Check whether the following system of equations can be solved using Cramer's rule : 5

$$2x + 2y + z = 7$$

$$x + 3y - z = 9$$

$$x - y - z = 1$$

If yes, then solve the system of equations using Cramer's rule. If no, then solve the system of equations using Gaussian Elimination.

(c) Suppose U and W are subspaces of V, dim (U) = 6, dim W = 3, dim (V) = 7. Find the possible values of dim (U ∩ W). 3

(d) State the Cauchy-Schwarz inequality for inner product spaces. Verify the inequality $u = (1, i, -i), v = (1, -1 + i, 0) \in \mathbf{C}^3$. 2

3. (a) Find the rank and signature for each of the forms :

$$x_1^2 - x_2^2 + x_4^2 \text{ and } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2.$$

Are these forms equivalent ? Justify your answer. 3

(b) Check whether or not the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

is diagonalisable. If it is, find a matrix P and a diagonal matrix D such that $PAP^{-1} = D$. 8

(c) For $x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$ define $\langle , \rangle : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ by :

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3 .$$

Check whether $\langle , \rangle$ defines an inner product on $\mathbf{R}^3$. 4

4. (a) Using row reduction, find the inverse of the following matrix : 6

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Find the orthogonal canonical reduction of the quadratic form : 9

$$-x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz + 2yz .$$

Also, find its principal axes.

5. (a) Prove that the set :

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = 2x_3\}$$

is a subsapce of $\mathbf{R}^4$. Find a basis of W. Also, find the dimension of W. 5

(b) Let T : $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ be the linear transformation defined by :

$$T(x, y, z) = (2x + y - z, x + y, x + z)$$

Find the matrix of the transformation with respect to the ordered basis $\{v_1, v_2, v_3\}$, where $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,0)$ and $v_3 = (1,0,0)$. Is T invertible ? Justify your answer. 5

(c) Let T = $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ be defined by :

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$$

Check that $T^4 = I$. Also, find the minimal polynomial of T. 5

6. (a) Consider the operator $T: \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$, defined by :

$$T(z_1, z_2, z_3, z_4) = (-iz_2, iz_1, -iz_4, z_3)$$

Find T* (w_1, w_2, w_3, w_4), where $w_i \in \mathbf{C}\ \forall i = 1, 2, 3, 4$ and check whether T is self-adjoint under the standard inner product on $\mathbf{C}^4$. Further, check whether T is unitary. 6

(b) Let $\mathbf{P}_4$ be the vector space over $\mathbf{R}$ of the set of all polynomials of degree at most four. Show that $1 + x + x^4$ and $1 + x^3 \in \mathbf{P}_4$ are linearly independent. Find a basis of $\mathbf{P}_4$ that contains the polynomials $1 + x + x^4$ and $1 + x^3$. 4

(c) Consider $M_n(\mathbf{C})$ as a vector space over $\mathbf{R}$. Let V_1 be the subspace of $n \times n$ Hermitian matrices and V_2 be the subspace of $n \times n$ skew-Hermitian matrices. Show that $V_1 + V_2 = M_n(\mathbf{C})$. Is $M_n(\mathbf{C}) = V_1 \oplus V_2$? Justify your answer. 5

7. (a) The following equation gives the reaction of metallic tin with concentrated nitric acid :

$$Sn + HNO_3 \rightarrow H_2SnO_3 + NO_2 + H_2O$$

Balance the chemical equation by formulating a suitable linear system of equations and solving it. (Sn – Chemical symbol for tin). 8

(b) Let $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ be defined by $T(x, y) = (x, y, x + y)$ and $S : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ be defined by $S(x, y, z) = (x + z, y - z)$. Let B_1 and B_2 be the standard bases of $\mathbf{R}^2$ and $\mathbf{R}^3$, respectively. Check that $[T \circ S]_{B_2}^{B_2} = [T]_{B_2}^{B_1} \cdot [S]_{B_1}^{B_2}$. 7

8. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer with short proof or a counter-example : 10

(a) Similar matrices have the same characteristic polynomial.

(b) If S and T are $n \times n$ square matrices :

$$\text{rank (S + T) = rank (S) + rank (T).}$$

(c) If A is a square matrix such that $A^2 = A$, then zero is an eigen value of A.

(d) There exist vectors u and v in an inner product space such that :

$$\|u\| = 2, \|v\| = 7, \|u+v\| = 8 \text{ and } \|u-v\| = 6.$$

(e) If $\{v_1, v_2, v_3\}$ is a linearly independent set, then $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_3\}$ is also a linearly independent set.

BMTE-141

कला स्नातक/विज्ञान स्नातक (सामान्य)

(बी. ए. जी./बी. एस. सी. जी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2023

बी.एम.टी.ई.-141 : रैखिक बीजगणित

समय : 3 घण्टे　　　　　　　　अधिकतम अंक : 100

नोट : *(i)* *इस प्रश्न पत्र में आठ सवाल हैं।*

(ii) ***आठवाँ*** *सवाल करना अनिवार्य है।*

(iii) *प्रश्न संख्या 1 से 7 तक कोई भी* **छः** *प्रश्न कीजिए।*

(iv) *कैलकुलेटरों के प्रयोग की अनुमति नहीं है।*

(v) *रफ कार्य उसी पेज के नीचे स्पष्ट रूप से दर्शित भाग में या पेज के बगल में करें।*

---

1. (क) एक आव्यूह क सहखण्डज को परिभाषित कीजिए। आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & i & -1+i \\ i & 2i & -i \end{bmatrix}$$

का सहखण्डज लिखिए। 2

(ख) जाँच कीजिए कि सदिशों की समुच्चय प्रसामान्य लांबिक समुच्चय है या नहीं : 3

$$\left\{\frac{i+k}{\sqrt{2}}, \frac{i-2j+k}{\sqrt{6}}, \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}\right\}$$

(ग) मान लीजिए $A = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ और $B = \{(x, 0, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$। सिद्ध कीजिए कि $A + B = \mathbf{R}^3$। क्या $\mathbf{R}^3$ A और B का अनुलोम योगफल है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

(घ) क्या आव्यूह

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

पंक्ति समानीत सोपानक रूप में है ? क्या यह पंक्ति समानीत रूप में है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। यदि यह आव्यूह पंक्ति समानीत सोपानक रूप में नहीं है, तो पंक्ति संक्रियाओं के प्रयोग से आव्यूह को पंक्ति समानीत सोपानक रूप में समानीत कीजिए। 3

(ङ) क्रमित आधार $\{x, x^2, 1 + x + x^2\}$ के सापेक्ष बहुपद $2x^2 - x + 1$ के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। 2

(च) मान लीजिए कि A एक 4×3 आव्यूह है। उस प्रारम्भिक आव्यूह को लिखिए जिसको A को बायीं तरफ से गुणा करने पर आव्यूह A पर निम्नलिखित पंक्ति संक्रियाएँ होंगी : 2

(i) $R_1 \leftrightarrow R_3$

(ii) $R_2 \rightarrow R_2 - 3R_4$

2. (क) पंक्ति समानयन द्वारा आव्यूह $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \\ -3 & 5 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ को कोटि और शून्यता निकालिए। 5

(ख) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय को क्रेमर विधि से हल किया जा सकता है : 5

$$2x + 2y + z = 7$$

$$x + 3y - z = 9$$

$$x - y - z = 1$$

यदि हाँ, तो समीकरण निकाय को क्रेमर नियम से हल कीजिए। यदि नहीं, तो गाउसीय निराकरण विधि से समीकरण निकाय को हल कीजिए।

(ग) मान लीजिए U और W, V की उपसमष्टियाँ हं और विमा $(U) = 6$, विमा $(W) = 3$, विमा $(V) = 7$। विमा $(U \cap W)$ का सम्भावित मान निकालिए। 3

(घ) आंतर गुणन समष्टियों के लिए कौशी–श्वार्ज असमिका बताइए। असमिका $u = (1, i, -i)$, $v = (1, -1+i, 0) \in \mathbf{C}^3$ का सत्यापित कीजिए। 2

3. (क) समघात $x_1^2 - x_2^2 + x_4^2$ और $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ के कोटि और चिह्नक निकालिए। क्या य समघात तुल्य है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

(ख) जाँच कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ विकर्णनीय है या नहीं। यदि विकर्णनीय है, तो आव्यूह P और विकण आव्यूह D निकालिए जिसके लिए $PAP^{-1} = D$। 8

(ग) $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$ के लिए $\langle , \rangle : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, को $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3$ द्वारा परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि $\langle , \rangle$ $\mathbf{R}^3$ पर आन्तर गुणनफल परिभाषित करता है या नहीं। 4

4. (क) पंक्ति समानयन का प्रयोग करके निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम निकालिए : 6

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(ख) द्विघाती समघात

$$-x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz + 2yz$$

का लाम्बिक विहित समानयन निकालिए। इसके मुख्य अक्ष भी ज्ञात कीजिए। 9

5. (क) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय :

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = 2x_3\}$$

$\mathbf{R}^4$ का उपसमुच्चय है। W का आधार निकालिए। W की विमा भी ज्ञात कीजिए। 5

(ख) मान लीजिए रैखिक संकारक $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$:

$$T(x, y, z) = (2x + y - z, x + y, x + z)$$

द्वारा परिभाषित है। क्रमित आधार $\{v_1, v_2, v_3\}$ के सापेक्ष T का आव्यूह निकालिए, जहाँ $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,1,0)$ और $v_3 = (1,0,0)$ है। क्या T व्युत्क्रमणीय है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5

(ग) मान लीजिए $T: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$$

द्वारा परिभाषित है। जाँच कीजिए कि $T^4 = I$। आगे T का न्यूनतम बहुपद निकालिए। 5

6. (क) रैखिक संकारक $T: \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ लीजिए जो :

$$T(z_1, z_2, z_3, z_4) = (-iz_2, iz_1, -iz_4, z_3)$$

द्वारा परिभाषित है। $T^*(w_1, w_2, w_3, w_4)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $i = 1, 2, 3, 4$ के लिए $w_i \in \mathbf{C}$, और जाँच कीजिए कि $\mathbf{C}^4$ पर मानक आंतर गुणनफल के सापेक्ष T स्वसंलग्न है। यह भी जाँच कीजिए कि T ऐकिक है। 6

(ख) मान लीजिए कि $\mathbf{P}_4, \mathbf{R}$ पर अधिक से अधिक कोटि चार वाले बहुपदों की सदिश समष्टि है। दिखाइए कि $1 + x + x^4$ और $1 + x^3 \in \mathbf{P}^4$ रैखीकत: स्वतन्त्र है। $\mathbf{P}_4$ के लिए $1 + x + x^4$ और $1 + x^3$ को आविष्ट करने वाला एक आधार निकालिए। 4

(ग) $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ को $\mathbf{R}$ पर एक सदिश समष्टि क तौर पर लीजिए। मान लीजिए V_1 $n \times n$ हर्मिटो आव्यूहों की सदिश समष्टि है और V_2 $n \times n$ विषम–हर्मिटो आव्यूहों की उपसमष्टि है। दिखाइए कि $\mathrm{M}_n(\mathbf{C}) = \mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2$। क्या $\mathrm{M}_n(\mathbf{C}) = \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2$? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5

7. (क) निम्नलिखित समीकरण धात्विक टिन की सांद्रित नाइट्रिक अम्ल के साथ प्रतिक्रिया का निरूपित करता है :

$$\mathrm{Sn} + \mathrm{HNO_3} \rightarrow \mathrm{H_2SnO_3} + \mathrm{NO_2} + \mathrm{H_2O}$$

उचित रैखिक समीकरणों का निर्माण करके वहल करके। इस समीकरण को संतुलित कीजिए। (Sn–टिन का रसायनिक प्रतीक)। 8

(ख) मान लीजिए $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$:

$$T(x, y) = (x, y, x + y)$$

द्वारा परिभाषित है और $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ $S(x, y, z) = (x + z, y - z)$ द्वारा परिभाषित है। मान लीजिए B_1 और B_2 क्रमशः $\mathbf{R}^2$ और $\mathbf{R}^3$ के मानक आधार हैं। जाँच कीजिए कि : 7

$$[T \circ S]_{B_2}^{B_2} = [T]_{B_2}^{B_1} \cdot [S]_{B_1}^{B_2}$$

8. निम्नलिखित कथनों में से कौन-स कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तर की लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण द्वारा पुष्टि कीजिए : 10

(क) समरूप आव्यूहों का अभिलाक्षणिक बहुपद समान है।

(ख) यदि S और T $n \times n$ वर्गीय आव्यूह हैं :

कोटि $(S + T) =$ कोटि $(S) +$ कोटि (T)

(ग) यदि A एक वर्गीय आव्यूह है जिसके लिए $A^2 = A$, तो शून्य A का आइगेन मान है।

(घ) एक आंतर गुणनफल समष्टि में ऐसे सदिश u और v हैं जिसके लिए $\|u\| = 2, \|v\| = 7$, $\|u + v\| = 8$ और $\|u - v\| = 6$।

(ङ) यदि $\{v_1, v_2, v_3\}$ रैखिकतः स्वतन्त्र समुच्चय है, तो $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_3\}$ भी रैखिकतः स्वतन्त्र समुच्चय है।