No. of Printed Pages : 12

BMTC-133

BACHELOR OF SCIENCE (GENERAL)/ BACHELOR OF ARTS (GENERAL) (BSCG/BAG)

Term-End Examination

June, 2023

BMTC-133 : REAL ANAYSIS

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : *(i) Questions No. 1 is compulsory. Do any **six** questions from Question Nos. **2** to **8**.*

(ii) Use of calculator is not allowed.

1. Which of the following statements are true or false ? Give reasons for your answers in the form of a short proof or counter-example, whichever is appropriate : 2×5=10

(a) Every infinite set is an open set.

(b) The negation of $p \wedge \sim q$ is $p \to q$.

(c) -1 is a limit point of the interval $]-2, 1]$.

(d) The necessary condition for a function f to be integrable is that it is continuous.

(e) The function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ defined by $f(x) = |x-2| + |3-x|$ is differentiable at $x = 5$.

2. (a) Show that the function f defined on $\mathbf{R}$ by : 5

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 \sin\left(\dfrac{1}{3x}\right), & \text{when } x \neq 0 \\ 0, & \text{when } x = 0 \end{cases}$$

is derivable on $\mathbf{R}$ but f' is not continuous at $x = 0$.

(b) (i) State Intermediate value theorem. 2

(ii) If $a + b + c = -2$ and $a - b + c = 2$, then show that both the roots of the equation $ax^2 + bx + c = 0$ are real. 3

(c) Define a Cauchy sequence. Prove that the sequence $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, where $a_n = \dfrac{3^2}{x^2 + 2^2}$, is Cauchy. 5

3. (a) Check whether the following sets are open or closed or neither : 5

(i) $]1, 6[\cup [2, 8]$

(ii) $\{3n : n \in \mathbf{N}\}$

(b) Test the following series for convergence : 4+3

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1}}{n}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} \right)$

(c) Using Weierstrass' M-test, show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+4)^2}$ converges uniformly in $[0, k]$, where k is a given finite positive number. 3

4. (a) Let $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ be a function defined by $f(x) = 1 + x^2$. Let $\mathrm{P} = \left[0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right]$ be a partition of the interval $[0,1]$. Find $\mathrm{S}(b, \hat{\mathrm{P}})$ with tags at the left end points of the interval. 5

(b) Apply the Cauchy's integral test to evaluate : 5

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{n+1}{n^2+1^2} + \frac{n+2}{n^2+2^2} + \frac{n+3}{n^2+3^2} + \dots + \frac{1}{n} \right]$$

(c) Show that the set : 5

$$\mathrm{S} = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1+(-1)^n}{3} : n \in \mathbf{N} \right\}$$

is not closed.

5. (a) Test the following series for convergence : 5

$$\frac{1}{3.4} + \frac{\sqrt{2}}{5.6} + \frac{\sqrt{3}}{7.8} + \dots\dots \text{ to } \infty$$

(b) Let $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ be a function defined by :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\left(\frac{1}{2x}\right), & \text{if } x \neq 0 \\ 0 \quad, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

Show that f' is continuous on $\mathbf{R}$ but it is not derivable at $x = 0$. 7

(c) Prove that a function $f : \mathrm{S} \to \mathrm{S}$ (where S is a finite non-empty set) is injective if it is surjective. 3

6. (a) Check whether the series : 7

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

where $f_n(x) = \dfrac{1}{n^3 + x^3}$, $x \in [0, 2]$

converge uniformly on [0, 2]. Also find $\Sigma f_n'(x)$ and show that it is uniformly convergent.

(b) Prove that between any two real roots of $e^x \cos 2x = 2$, there is at least one real root of $e^x \sin 2x = 1$. 6

(c) Disprove the statement : 2

"$(x+y)^n = x^n + y^n \ \forall \ n \in \mathbf{N},\ x, y \in \mathbf{Z}$"

by providing a suitable counter-example.

7. (a) Suppose that f and g are two Riemann integrable functions defined on $[a, b]$ such that $f(x) \le g(x)$ for all $x \in [a, b]$, then show that for all $x \in [a, b]$, $\int_a^b f \le \int_a^b g$. 7

(b) Prove that : 5

$$1 - x < e^{-x} \quad \text{if } x > 0.$$

(c) Prove that every convergent sequence is Cauchy. 3

8. (a) Find the supremum and infimum of the set : 5

$$S = \left\{ \frac{1}{n-1} : n \ge 2 \right\}.$$

(b) For $x \in [0, 2]$ and $n \in \mathbf{N}$, define $f_n(x) = 3x^2 + \dfrac{2x}{n}$. Find the limit function 'f' of the sequence $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Is 'f' continuous ? Check if $\int_0^2 f(x)\,dx$ and $\lim_{n \to \infty} \int_0^2 f_n(x)\,dx$ are equal or not. 7

(c) Show that $[a, \infty)$ is a closed set. 3

BMTC-133

बी. एस-सी. (सामान्य)/बी. ए. (सामान्य)

[बी. एस-सी. (जी)/ बी. ए. (जी)]

सत्रांत परीक्षा

जून, 2023

बी.एम.टी.सी.-133 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : (*i*) प्रश्न संख्या **1** अनिवार्य है।

(*ii*) प्रश्न संख्या **2** से **8** तक कोई **छः** प्रश्न कीजिए।

(*iii*) कैल्कुलेटरों के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं या असत्य हैं ? लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण जो भी उचित हो, के साथ अपने उत्तरों के कारण बताइए : 2×5=10

(क) प्रत्येक अनंत समुच्चय विवृत समुच्चय होता है।

(ख) $p \wedge \sim q$ का निषेध $p \to q$ है।

(ग) -1 अन्तराल $]-2,1]$ का सीमा बिन्दु है।

(घ) फलन f के समाकलनीय होने के अनिवार्य प्रतिबंध है कि वह संतत हो।

(ङ) $f(x) = |x-2| + |3-x|$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x = 5$ पर अवकलनीय है।

2. (क) दिखाइए कि $\mathbf{R}$ पर : 5

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 \sin\left(\frac{1}{3x}\right), & \text{जब } x \neq 0 \\ 0 \quad , & \text{जब } x = 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन f, $\mathbf{R}$ पर अवकलनीय है लेकिन f', $x = 0$ पर संतत नहीं है।

(ख) (i) मध्यवर्ती माध्य प्रमेय का कथन दीजिए। 2

(ii) यदि $a+b+c=-2$ और $a-b+c=2$, तब दिखाइए कि समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के दोनों मूल वास्तविक हैं। 3

(ग) कॉशी अनुक्रम को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, जहाँ $a_n = \frac{3^2}{n^2+2^2}$ कॉशी है। 5

3. (क) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित समुच्चय विवृत हैं या संवृत हैं या दोनों ही नहीं हैं : 5

(i) $]1,6[\, \cup [2,8]$

(ii) $\{3n : n \in \mathbf{N}\}$

(ख) निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण की जाँच कीजिए : 4+3

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}}{n}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)$

(ग) वीयरस्ट्रॉस एम-परीक्षण द्वारा दर्शाइए कि श्रेणी

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+4)^2}, [0,k]$$

में एकसमानतः अभिसरण करती है, जहाँ k दिया गया परिमित धनात्मक संख्या है। 3

4. (क) मान लीजिए :

$$f:[0,1]\to \mathbf{R},\ f(x)=1+x^2$$

द्वारा परिभाषित एक फलन है। मान लीजिए :

$$P=\left[0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},1\right]$$

अन्तराल $[0,1]$ का एक विभाजन है। अन्तराल के बाएँ अन्त बिन्दुओं पर टेगों के साथ $S(f,\hat{P})$ ज्ञात कीजिए। 5

(ख) कॉशी समाकल परीक्षण द्वारा निम्नलिखित का मूल्यांकन कीजिए : 5

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{n+1}{n^2+1^2}+\frac{n+2}{n^2+2^2}+\frac{n+3}{n^2+3^2}+\ldots+\frac{1}{n}\right]$$

(ग) दिखाइए कि समुच्चय : 5

$$S=\left\{\frac{1}{n}+\frac{1+(-1)^n}{3} : n\in\mathbf{N}\right\}$$

विवृत नहीं है।

5. (क) निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए : 5

$$\frac{1}{3.4}+\frac{\sqrt{2}}{5.6}+\frac{\sqrt{3}}{7.8}+\ldots\ldots+\infty$$

(ख) मान लीजिए $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$: 7

$$f(x)=\begin{cases} x^3\cos\left(\frac{1}{2x}\right), & \text{यदि } x\neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x=0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन है। दिखाइए कि $f', \mathbf{R}$ पर संतत है लेकिन $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है।

(ग) सिद्ध कीजिए कि फलन $f:S\to S$ (जहाँ S परिमित अरिक्त समुच्चय है) एकैकी है, यदि यह आच्छादी है। 3

6. (क) जाँच कीजिए क्या श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $[0,2]$ पर एकसमानतः अभिसरण करती है, जहाँ : 7

$$f(x) = \frac{1}{n^3 + x^3},$$

$$x \in [0,2].\ \Sigma f_n'(x)$$

भी ज्ञात कीजिए और दिखाइए कि यह एकसमानतः अभिसरण करता है।

(ख) सिद्ध कीजिए कि $e^x \cos 2x = 2$ के किन्हीं दो वास्तविक मूलों के बीच $e^x \sin 2x = 1$ का कम से कम एक वास्तविक मूल होता है। 6

(ग) एक उचित प्रति-उदाहरण देते हुए निम्नलिखित कथन को असिद्ध कीजिए : 2

"$(x+y)^n = x^n + y^n\ \forall\ n \in \mathbf{N},\ x, y \in \mathbf{Z}$"

7. (क) मान लीजिए f और g, $[a,b]$ पर परिभाषित ऐसे दो रीमान समाकलनीय फलन हैं, जहाँ सभी $x \in [a,b]$ के लिए $f(x) \le g(x)$, तब दिखाइए कि सभी $x \in [a,b]$ के लिए $\int_a^b f \le \int_a^b g$। 7

(ख) सिद्ध कीजिए : 5

$$1 - x < e^{-x},$$

यदि $x > 0$।

(ग) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम कॉशी है। 3

8. (क) समुच्चय $S = \left\{\frac{1}{n-1} : n \ge 2\right\}$ का उच्चक और निम्नक ज्ञात कीजिए। 5

(ख) $x \in [0,2]$ और $n \in \mathbf{N}$ के लिए $f_n(x) = 3x^2 + \frac{2x}{n}$ लीजिए। अनुक्रम $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ का सीमा फलन 'f' ज्ञात कीजिए। क्या 'f' संतत है ? जाँच कीजिए कि $\int_0^2 f(x)\,dx$ और $\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\,dx$ समान हैं या नहीं। 7

(ग) दिखाइए कि प्रत्येक $[a,\infty)$ एक विवृत समुच्चय है। 3