No. of Printed Pages : 12

BMTC-131

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP) (BSCG/BAG)

Term-End Examination

June, 2023

BMTC-131 : CALCULUS

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : *(i) All questions/parts of Section A and Section B are compulsory.*

(ii) Attempt any ***five*** *questions from Section C.*

(iii) Use of calculator is not allowed.

Section—A

1. Which of the following statements are true and which are false ? Give a short proof or a counter-example, whichever is appropriate, in support of your answer : 20

(i) If A, B and C are three sets, then :

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$$

(ii) $\lim_{x \to 0} \frac{3x + 2 \mid x \mid}{5x - 3 \mid x \mid} = \frac{2}{3}$.

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\int_1^{2x^3} \tan \theta \, d\theta \right) = 6x \tan (2x^3)$.

(iv) $\frac{d}{dx}\left(\log \mid x \mid \right) = \frac{1}{x} (x \neq 0)$.

(v) The curve, $y = \frac{x+1}{x-2}$ has an oblique asymptote.

(vi) A cubic equation with real coefficients can be found, whose roots are 1, – 1 and $\sqrt{-1}$.

(vii) The maximum possible domain of a function f given by :

$$f(x) = \frac{\sqrt{5 - x}}{\ln x} \text{ is }]0, 5[.$$

(viii) If for a function f, $\mid f \mid$ is continuous, then f is also continuous.

(ix) $\sin x$ has only one point of inflection in $]0, 2\pi[$.

(x) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cot x \, dx = \ln 2$.

Section—B

2. (a) Find $\frac{dy}{dx}$ for the following : 6

(i) $y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$ at $x = \frac{1}{2}$

(ii) $y = \cot^{-1}\left(\sqrt{x^2-1}\right) + \sec^{-1} x \, (x > 0)$

(b) Evaluate : 4

$$\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{2(x^2+1)} dx .$$

3. (a) If $y = x^2 e^x$, prove that : 4

$$y_n = \frac{n(n-1)}{2} y_2 - n(n-2) y_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} y .$$

(b) If the sum of two roots of the equation : 6

$$4x^4 + 8x^3 + 13x^2 + 2x + 3 = 0$$

is zero, find all its roots.

4. (a) If $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta \, d\theta \, (n > 1)$, then show that : 3

$$n(I_{n-1} + I_{n+1}) = 1 .$$

(b) Evaluate : 3

$$\int_{-3}^{3} | x - 1 | \, dx .$$

(c) Find $\frac{dy}{dx}$, when $y = (\ln x)^x + (\sin^{-1} x)^x$. 4

Section—C

5. (a) Find the area bounded by the curve : 4

$$r = 4\cos\theta .$$

(b) Evaluate : 3

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x \sec^2 x - x}{x^2 \tan x} .$$

(c) Examine, whether the equation, $x^3 - 10x + 8 = 0$ has a real root in the interval, [– 1, 2], or not. 3

6. Trace the curve, $y^2 (3 - x) = x^3$, stating all the properties needed to trace it. 10

7. (a) Check whether the relation : 3

$$R = \{(m, n) \in \underline{N} \times \underline{N} : m \text{ is a factor of } n\}$$

is an equivalence relation or not.

(b) If the function $f : \underline{R} \to \underline{R}$ be given by $f(x) = x^2 + 2$ and g be a function given by $g(x) = \frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$, then find f o g, g o f and hence find $(f \text{ o } g)(2)$ and $(g \text{ o } f)(-3)$. 4

(c) Evaluate : 3

$$\lim_{x \to 2} \left\{ \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right\}.$$

8. (a) Find the length of the arc of the parabola, $x^2 = 12y$, cut off by its latus rectum. 6

(b) For the function f defined by $f(x) = 3x - 2$ over [0, 1], verify : 4

$$L(P, f) \leq U(P, f),$$

where the partition P is $\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$.

9. (a) Using the $\varepsilon - \delta$ definition of limit, prove that : 5

$$\lim_{x \to 1} (2x^2 - 3x^3) = -1.$$

(b) Expand e^{2x} in powers of $(x - 1)$ upto four terms. 5

10. (a) Determine the values of a and b for which the function f defined by : 5

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b; & \text{if } x \leq 0 \\ -\frac{3}{x^2 + 1} + 1; & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

is continuous. Check also derivability at $x = 0$.

(b) By considering the function f given by : 5

$$f(x) = (x - 2)\ln x \text{ on } [1, 2],$$

show that the equation, $x\ln(ex) = 2$ is satisfied by at least one value of x lying between 1 and 2.

BMTC-131

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी.डी.पी.) (बी.एस.सी.जी./बी.ए.जी)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2023

बी.एम.टी.सी.-131 : कलन

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *(i)* भाग 'अ' और भाग 'ब' के सभी प्रश्न/प्रश्नों के सभी भाग **अनिवार्य** हैं।

(ii) भाग 'स' से कोई **पाँच** प्रश्न कीजिए।

(iii) कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

भाग—अ

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं? अपने उत्तर के पक्ष में एक संक्षिप्त उपपत्ति या प्रति उदाहरण दीजिए : 20

(i) यदि A, B और C तीन समुच्चय हैं, तो :

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

(ii) $\lim_{x \to 0} \frac{3x + 2 \mid x \mid}{5x - 3 \mid x \mid} = \frac{2}{3}$

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\int_1^{2x^3} \tan \theta \, d\theta \right) = 6x \tan (2x^3)$

(iv) $\frac{d}{dx}(\log \mid x \mid) = \frac{1}{x} (x \neq 0)$

(v) वक्र $y = \frac{x+1}{x-2}$ की एक तिर्यक अनंतस्पर्शी है।

(vi) मूलों $1, -1$ और $\sqrt{-1}$ वाली एक त्रिघात समीकरण, जिसके गुणांक वास्तविक हं, प्राप्त की जा सकती है।

(vii) $f(x) = \frac{\sqrt{5-x}}{\ln x}$ द्वारा परिभाषित फलन f का अधिकतम संभावित प्रांत $]0, 5[$ है।

(viii) एक फलन f के लिए यदि $\mid f \mid$ सतत् है तो f भी सतत् होगा।

(ix) $\sin x$ का केवल एक नतिपरिवर्तन बिन्दु $]0, 2\pi[$ में है।

(x) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cot x \, dx = \ln 2$

भाग—ब

2. (क) निम्नलिखित के $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए : 6

(i) $y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$, $x = \frac{1}{2}$ पर

(ii) $y = \cot^{-1}\left(\sqrt{x^2-1}\right) + \sec^{-1} x \, (x > 0)$

(ख) $\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{2(x^2+1)} dx$ का मूल्यांकन कीजिए। 4

3. (क) यदि $y = x^2 e^x$ है तो सिद्ध कीजिए कि : 4

$$y_n = \frac{n(n-1)}{2} y_2 - n(n-2) y_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} y$$

(ख) समीकरण $4x^4 + 8x^3 + 13x^2 + 2x + 3 = 0$ के दो मूल्यों का योगफल शून्य है, तो सभी मूल ज्ञात कीजिए। 6

4. (क) यदि $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta \, d\theta \, (n > 1)$ है तो दर्शाइए कि $n(I_{n-1} + I_{n+1}) = 1$। 3

(ख) $\int_{-3}^{3} |x - 1| \, dx$ का मूल्यांकन कीजिए। 3

(ग) यदि $y = (\ln x)^x + (\sin^{-1} x)^x$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। 4

भाग—स

5. (क) वक्र $r = 4\cos\theta$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 4

(ख) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x \sec^2 x - x}{x^2 \tan x}$ का मूल्यांकन कीजिए। 3

(ग) जाँच कीजिए कि समीकरण $x^3 - 10x + 8 = 0$ का अंतराल $[-1, 2]$ में एक वास्तविक मूल है या नहीं। 3

6. अनुरेखण में प्रयोग किये गये सभी गुण-धर्मों को लिखते हुए वक्र $y^2(3 - x) = x^3$ का अनुरेखण कीजिए। 10

7. (क) जाँच कीजिए कि सम्बन्ध $R = \{(m, n) \in \underline{N} \times \underline{N} : m, n$ का एक विभाजक है।$\}$ तुल्यता सम्बन्ध है या नहीं। 3

(ख) यदि $f(x) = x^2 + 2$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \underline{R} \to \underline{R}$ और $g(x) = \frac{x}{x-1}, x \neq 1$ द्वारा परिभाषित फलन f हैं तो $f \circ g, g \circ f$ ज्ञात कीजिए। इस प्रकार $(f \circ g)(2)$ और $(g \circ f)(-3)$ भी ज्ञात कीजिए। 4

(ग) $\lim_{x \to 2} \left\{ \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right\}$ का मूल्यांकन कीजिए। 3

8. (क) परवलय $x^2 = 12y$ की नाभिलंब द्वारा काटी गयी चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए। 6

(ख) अंतराल $[0,1]$ पर $f(x) = 3x - 2$ द्वारा परिभाषित फलन f के लिए सत्यापित कीजिए; $L(P, f) \leq U(P, f)$ जहाँ विभाजन P, $\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ है। 4

9. (क) सीमा की $\varepsilon - \delta$ परिभाषा का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि : 5

$$\lim_{x \to 1} (2x^2 - 3x^3) = -1$$

(ख) e^{2x} का $(x-1)$ की घातों में चार पदों तक विस्तार कीजिए। 5

10. (क) a और b के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & x \leq 0 \\ -\frac{3}{x^2+1} + 1, & x > 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन f सतत् है। $x = 0$ पर f की अवकलनीयता की जाँच भी कीजिए। 5

(ख) अंतराल $[1, 2]$ पर $f(x) = (x-2)\ln x$ द्वारा परिभाषित फलन f लीजिए और दर्शाइए कि समीकरण $x \ln(ex) = 2$, x के 1 और 2 के बीच कम से कम एक मान को सन्तुष्ट करती है। 5