No. of Printed Pages : 12

MTE-14

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2022

MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) Attempt any **five** questions.*

(ii) Use of calculator is not allowed.

1. (a) Write the dimensions of the following : 2

   (i) Momentum

   (ii) Energy

   (iii) Viscosity

   (iv) Coefficient of diffusion

   (b) A pond of fishes has a stable population. Prior to this situation the population increased from an initially low level. When the population was 15,000, the proportionate birth rate was 40% and the proportionate death rate was 60% per year. When the population was 30,000, the

proportionate birth rate was 20% and proportionate death rate was 25%. If the fishing is allowed at a rate of 10% of population per year, show that the population grows according to logistic model and find the equilibrium population. 5

   (c) State the assumptions made by Malthus while formulating the population growth model. 3

2. (a) Find the saddle point and value of the game for the following pay-off model : 3

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

   (b) A particle is projected vertically upwards with a velocity u m/sec, and after t seconds, another particle is projected upwards from the some point and with the same velocity. Prove that the particles will meet at a height $\frac{4u^2 - g^2t^2}{8g}$ metre after a time $\left(\frac{t}{2} + \frac{u}{g}\right)$ second from the start. 3

(c) If the length of an artery is 3 cm, arterial blood viscosity is $\mu = 0.025$ and radius of artery is 6×10^{-3} cm and pressure $P = P_1 - P_2 = 8 \times 10^3$ dyne/cm^2, then find maximum peak velocity of blood and shear stress on the wall of the artery. 4

3. (a) Find the output yielding maximum profit for the cost function : 4

$$C = 0.6x^3 - 0.7x^2 + 10x + 9$$

given that the cost price of x is ₹ 40 per unit.

(b) Suppose the population $x(t)$ and $y(t)$ satisfy the model given by the following system of equations :

$$\frac{dx}{dt} = 14x - 2x^2 - xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 16y - 2y^2 - xy$$

Determine the critical points of the system and discuss the type and stability of these critical points. Which critical point represents the possibility of co-existence of the two populations ? 6

4. (a) At the cashier counter in a bank receives cash from customers, one person at a time and 3 chairs are kept for customers waiting in queue. The person desiring to deposit cash comes according to Poisson distribution with average 10 persons per hour. The service time per customer is exponentially distributed with mean 4 minutes per customer. 6

(i) Find the utilizator factor.

(ii) Calculate the effective arrival rate at the cash counter.

(iii) What is the probability that an arriving customer has not to wait ?

(b) Find the escape velocity and acceleration due to gravity on Jupiter for the following data : 4

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}$$

$$\text{Radius} = 2.58 \times 10^7 \text{ m}$$

and $$\text{Mass} = 1.966 \times 10^{20} \text{ kg}$$

5. (a) A particle is performing a simple harmonic motion of period T about a centre O and it passes through the position P (OP = b) with velocity v in the direction OP. Prove that the time which elapses before it returns to P is : 5

$$\left(\frac{T}{\pi}\right)\tan^{-1}\left(\frac{VT}{2\pi b}\right)$$

(b) For the pay-off matrix given below, transform the matrix game into corresponding linear programming problem for player A : 5

Player B

Player A	1	2	3
1	3	−5	8
2	−6	8	−9
3	8	−10	12

6. (a) If the bob of a simple pendulum is projected from the position of stable equilibrium with velocity equal to that due to falling from the highest point of the circle, show that the time of describing any angle θ is : 6

$$\sqrt{\frac{l}{g}}\log\left[\sec\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\theta}{2}\right]$$

(b) For an entrepreneur, the short-run cost function is :

$$q^3 - 15q^2 + 70q + 60$$

Determine the price at which entrepreneur ceases production in an ideal market. Also find the supply function. 4

7. (a) Let the return of two securities be as given in the table below : 7

Event (j)	Chance $p_{1j} = p_{2j}$	Return	
		R_{1j}	R_{2j}
1	$\frac{1}{4}$	28	21
2	$\frac{1}{2}$	23	18
3	$\frac{1}{4}$	16	17

Find the expected return of portfolio P = (0.7, 0.3).

(b) Find the terminal velocity of a drizzle drop with diameter 0.005 cm. How long does it take to reach ground if it starts in a cloud 2000 metre high ? 3

MTE-14

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2022

एम. टी. ई.-14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i) किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

(ii) कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) निम्नलिखित की विमाएँ लिखिए : 2

(i) संवेग

(ii) ऊर्जा

(iii) श्यानता

(iv) प्रसार गुणांक

(ख) एक कुंड में मछलियों की संख्या स्थायी है। इस स्थिति से पहले यह संख्या प्रारम्भ में कम स्तर

पर बढ़ी। जब संख्या 15,000 थी, आनुपातिक जन्म दर 40% प्रतिवर्ष थी और यह आनुपातिक मृत्यु दर प्रति वर्ष 60% थी, जब संख्या 30,000 हुई, आनुपातिक जन्म दर 20% और आनुपातिक मृत्यु दर 25% थी। यदि मछलियों की संख्या प्रतिवर्ष 10% की दर से पकड़ने की अनुमति है, तो दर्शाइए कि मछलियों की संख्या में वृद्धि लॉजिस्टिक निदर्श के अनुसार है। मछलियों की संतुलित संख्या ज्ञात कीजिए। 5

(ग) समष्टि वृद्धि निदर्श को सूत्रित करते हुए माल्थस की मान्यताएँ लिखिए। 3

2. (क) निम्नलिखित खेल आव्यूह के लिए पल्याण बिंदु और खेल का मान ज्ञात कीजिए : 3

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

(ख) एक कण को ऊर्ध्वाधरत: वेग u m/sec के साथ ऊपर की ओर प्रक्षेपित किया जाता है। t seconds के बाद उसी वेग के साथ और उसी बिन्दु से दूसरा कण ऊपर की ओर प्रक्षेपित किया

जाता है। सिद्ध कीजिए कि दोनों कण फेंके जाने के $\left(\frac{t}{2}+\frac{u}{g}\right)$ सेकण्ड के बाद $\frac{4u^2-g^2t^2}{8g}$ मीटर ऊँचाई पर मिलेंगे। 3

(ग) यदि धमनी की लंबाई 3 सेमी, त्रिज्या 6×10^{-3} cm और धमनी रक्त श्यानता $\mu = 0.025$ है, तो मान लीजिए $P = P_1 - P_2 = 6\times10^3$ dyne/cm^2 है। रक्त का अधिकतम शिखर वेग और धमनी की दीवार का आरूपण प्रतिबल ज्ञात कीजिए। 4

3. (क) लागत फलन $C = 0.6x^3 - 0.7x^2 + 10x + 9$ के लिए वह निर्गत ज्ञात कीजिए जिससे अधिकतम लाभ प्राप्त हो, जबकि दिया गया है कि x की लागत कीमत ₹ 40 प्रति इकाई है। 4

(ख) मान लीजिए कि समष्टि $x\ (t)$ और $y\ (t)$ निम्नलिखित समीकरण निकाय द्वारा दिये गये निदर्श को संतुष्ट करती है : 6

$$\frac{dx}{dt} = 14x - 2x^2 - xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 16y - 2y^2 - xy$$

निकाय के क्रांतिक बिंदु निर्धारित कीजिए और प्रत्येक क्रांतिक बिंदु के प्रकार और स्थायित्व की

चर्चा कीजिए। कौन–सा क्रांतिक बिंदु दो समष्टि के सहअस्तित्व की संभावना को निरूपित करता है ?

4. (क) एक बैंक में एक कैश कांउटर ग्राहकों से कैश लेता है। एक समय में एक ग्राहक की सेवा की जाती है, वहाँ 3 कुर्सियाँ पंक्ति में प्रतीक्षा करने वाले ग्राहकों के लिए हैं। जिन ग्राहकों को कैश जमा करना है उनकी प्वॉयसां बंटन से आगमन दर 10 ग्राहक प्रति घंटा है। सेवा दर प्रति ग्राहक 4 मिनट है जो चरघातांकीय बंटन में है। 6

(i) उपयोगिता कारक ज्ञात कीजिए।

(ii) कैश कांउटर पर प्रभावी आगमन दर ज्ञात कीजिए।

(iii) वह प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि आये हुए ग्राहक को प्रतीक्षा नहीं करनी पड़ती है।

(ख) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए गुरुत्वाकर्षण के कारण पलायन वेग और त्वरण ज्ञात कीजिए : 4

$G = 6.67\times10^{-11}$ m^3/kg

त्रिज्या $= 2.58\times 10^7$ m

द्रव्यमान $= 1.966\times10^{20}$ kg

5. (क) एक कण, केन्द्र O के सापेक्ष आवर्तकाल T वाले सरल आवर्त में गतिशील है। यह बिंदु P (OP = b) से OP दिशा में वेग v से गुजरता है। सिद्ध कीजिए कि इसके P पर वापस लौटने तक लगा समय $\left(\frac{T}{\pi}\right)\tan^{-1}\left(\frac{vT}{2\pi b}\right)$ है। 5

(ख) निम्नलिखित खेल समूह को संगत रैखिक प्रोग्रामन समस्या में रूपान्तरित कीजिए : 5

खिलाड़ी B

खिलाड़ी A	1	2	3
1	3	−5	8
2	−6	8	−9
3	8	−10	12

6. (क) यदि एक सरल दोलक के बॉब को, स्थायी अवस्था की स्थिति से उस वेग के समान, जो एक वृत्त के उच्चतम बिंदु से गिरने के कारण होता है, फेंका जाता है, तो दर्शाइए कि किसी कोण θ को बनाने में लगा समय $\sqrt{\frac{l}{g}}\log\left[\sec\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\theta}{2}\right]$ होगा। 6

(ख) एक उद्यमकर्ता के लिए अल्पकालीन लागत फलन $q^3 - 15q^2 + 70q + 60$ है। वह कीमत ज्ञात कीजिए जिस पर उद्यमकर्ता आदर्श बाजार में अपने उत्पादन को रोक देगा। पूर्ति फलन भी ज्ञात कीजिए। 4

7. (क) मान लीजिए कि दो प्रतिभूतियों के प्रतिफल नीचे दिये गये हैं : 7

घटना (j)	संयोग $p_{1j} = p_{2j}$	प्रतिफल R_{1j}	प्रतिफल R_{2j}
1	$\frac{1}{4}$	28	21
2	$\frac{1}{2}$	23	18
3	$\frac{1}{4}$	16	17

निवेश सूची P = (0.7, 0.3) के लिए प्रत्याशित प्रतिफल ज्ञात कीजिए।

(ख) व्यास 0.005 cm वाली एक वर्षा की बूँद का अन्तिम वेग ज्ञात कीजिए। उसके भूमि तक पहुँचने में लगा समय ज्ञात कीजिए। यदि वह 2000 m ऊँचे एक बादल से नीचे गिरना प्रारंभ करती है। 3