No. of Printed Pages : 11

MTE-01

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

(BDP)

Term-End Examination

June, 2022

Elective Course : Mathematics

MTE-01 : CALCULUS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) Question No. 1 is compulsory.*

(ii) Attempt any four questions from Question Nos. 2 to 7.

(iii) Use of calculator is not allowed.

State whether the following statements are true *or* false. Justify your answers with a short proof or a counter example : 2 each

1. (i) The function f defined by :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 8$$

is always decreasing on R.

(ii) The period, if it exists, of the function defined by $f(x) = 4\cos 2x$ is 2π.

(iii) Product of an odd function and an even function is always an even function.

(iv) The function $f : [1, 5] \to$ R, defined by $f(x) = x^3 - 2x^2$ has a local minima.

(v) $\frac{d}{dx}\left[\int_{\frac{1}{2}}^{\sin x} \sqrt{\sin^{-1} t}\, dt\right] = \sqrt{x}\cos x - \sqrt{\frac{\pi}{6}}$.

2. (a) A curve is drawn to pass through the points given by the following table :

x	y
0.5	2.7
1.0	2.5
1.5	2.6
2.0	2.7
2.5	2.8
3.0	2.9
3.5	3.0
4.0	2.7
4.5	2.4

Estimate the area bounded by the curve, the axis of x and the lines $x = 1$, $x = 4$, using Simpson's rule. 4

(b) If :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} \theta \, d\theta$$

prove that

$$(2n-2)I_n = (2n-3)I_{n-1} \; (n > 1)$$

Hence evaluate I_4. 6

3. Trace the curve :

$$y(a^2 + x^2) = a^2 x \qquad (a > 0)$$

clearly stating all the properties used in the process. 10

4. (a) Given a function f, defined on R, by : 3

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 9},$$

$l = 1$ and $\varepsilon = 0.1$, find $a > 0$ such that :

$$x > a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

(b) Find U (P, f) and L (P, f), where

$$f(x) = x^2 - 4$$

and $P = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. 3

(c) Evaluate : 4

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + 4\cos^2 x}$$

5. (a) Find the equations of the tangent and the normal to the curve : 4

$$x = e^t \cos t, \; y = e^t \sin t$$

at $t = 0$.

(b) Find $\frac{dy}{dx}$, if : 6

$$y = (\ln x)^{\cos x} + (\tan x)^{\operatorname{cosec} x}.$$

6. (a) Find an approximate value of ln (0.95) upto 3 decimal places, using Maclaurin's expansion. 3

(b) Find the volume of the solid generated by revolving the cardioid, $r = 1 - \cos \theta$ about its initial line. 7

7. (a) Find k such that the function f defined by :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 , & x \geq 1 \\ 2x^2 - kx, & x < 1 \end{cases}$$

becomes continuous at $x = 1$. Check whether this function now is continuous at each point of R. 3

(b) Find the area of the region bounded by the curve $16y^2 = x^5(4 - x)$. 5

(c) Find the domain of the function f defined by : 2

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-5)(9+x)}}.$$

MTE-01

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2022

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-01 : कलन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i) प्र. सं. 1 अनिवार्य है।*

(ii) प्रश्न संख्या 2 से 7 तक कोई चार प्रश्न कीजिए।

(iii) कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तर के पक्ष में एक संक्षिप्त उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए : प्रत्येक 2

(i) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 8$ द्वारा परिभाषित फलन f, $\mathbf{R}$ पर ह्रासमान है।

(ii) $f(x) = 4\cos 2x$ द्वारा परिभाषित फलन f का आवर्त, यदि है, तो 2π है।

(iii) एक सम फलन और एक विषम फलन का गुणनफल एक सम फलन है।

(iv) $f(x) = x^3 - 2x^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f : [1, 5] \to \mathbf{R}$ का एक स्थानीय न्यूनतम है।

(v) $\frac{d}{dx}\left[\int_{\frac{1}{2}}^{\sin x} \sqrt{\sin^{-1} t}\, dt\right] = \sqrt{x}\cos x - \sqrt{\frac{\pi}{6}}$ ।

2. (क) निम्नलिखित तालिका में दिये गये बिन्दुओं से गुजरने वाला वक्र खींचा जाता है :

x	y
0.5	2.7
1.0	2.5
1.5	2.6
2.0	2.7
2.5	2.8
3.0	2.9
3.5	3.0
4.0	2.7
4.5	2.4

सिम्पसन के नियम का प्रयोग करके वक्र, x-अक्ष, रेखा $x = 1, x = 4$ द्वारा घिरा क्षेत्रफल निकालिए। 4

(ख) यदि : 6

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}\theta\, d\theta$$

है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$(2n-2)\,I_n = (2n-3)\,I_{n-1}\,(n > 1)$$

इस प्रकार I_4 भी निकालिए।

3. वक्र :

$$y\left(a^2 + x^2\right) = a^2 x \qquad (a > 0)$$

का आरेखण कीजिए। आरेखण में प्रयोग किए गये गुणधर्मों को लिखिए। 10

4. (क) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 9}$ द्वारा $\mathbf{R}$ पर परिभाषित फलन $f, l = 1$ और $\varepsilon = 0.1$, दिया गया है। $a > 0$ ज्ञात कीजिए कि : 3

$$x > a \Rightarrow \left|f(x) - l\right| < \varepsilon$$

(ख) $\mathrm{U}(\mathrm{P}, f)$ और $\mathrm{L}(\mathrm{P}, f)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$f(x) = x^2 - 4 \text{ है।}$$

और $\mathrm{P} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ है। 3

(ग) $\int_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{1 + 4\cos^2 x}$ को हल कीजिए। 4

5. (क) वक्र :

$$x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$$

के लिए $t = 0$ पर स्पर्शरेखा और अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए। 4

(ख) यदि : 6

$$y = (\ln x)^{\cos x} + (\tan x)^{\operatorname{cosec} x}$$

तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

6. (क) मैक्लॉरिन प्रसार का प्रयोग करके $\ln(0.95)$ का 3 दशमलव स्थान तक सन्निकटन मान ज्ञात कीजिए। 3

(ख) हृदयाभ $r = 1 - \cos\theta$ को प्रारम्भिक रेखा के सापेक्ष घूर्णन द्वारा बने ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए। 7

7. (क) k के वे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 , & x \geq 1 \\ 2x^2 - kx, & x < 1 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $f, x = 1$ पर सतत् है। जाँच कीजिए कि क्या यह फलन अब $\mathbf{R}$ के प्रत्येक बिन्दु पर सतत् है। 3

(ख) वक्र $16y^2 = x^5(4 - x)$ द्वारा घिरे प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

(ग) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-5)(9+x)}}$ द्वारा परिभाषित फलन f का प्रान्त ज्ञात कीजिए। 2