No. of Printed Pages : 8

MTE-09

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2022

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-09 : REAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Attempt **five** questions in all. Question no. **7** is **compulsory**. Attempt any **four** questions from questions no. **1** to **6**. Use of calculators is **not** allowed.*

1. (a) Show that $R_n(x)$, the Lagrange's form of remainder in the Maclaurin series expansion of sin 2x, tends to zero as $n \to \infty$. Further obtain the Maclaurin's infinite expansion of sin 2x. *5*

(b) Check whether or not the sequence (a_n), defined by

$$a_1 = \frac{4}{3}, \; a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}, \; n \geq 1 \text{ is}$$

(i) bounded, (ii) monotonic, and (iii) convergent. *5*

2. (a) Draw the graph of the function f, defined by

$f(x) = [2x] + |x - 3|, \; x \in [2, 4].$ *3*

(b) Using Weierstrass' M-test, show that the following series converges uniformly : *4*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n, \quad x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$$

(c) Find a and b such that

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{a \tan x + bx}{x^3} \right) \text{ exists.}$$ *3*

3. (a) Check whether or not the function f, defined by

$$f(x) = \begin{cases} -5, & x \text{ is rational} \\ 0, & x \text{ is irrational,} \end{cases}$$

is integrable on [0, 4]. *4*

(b) Use the $\varepsilon - \delta$ definition to show that

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1 - x}{1 + x} \right) = 0.$$ *3*

(c) Show that : *3*

$$\sin x > x - \frac{1}{6} x^3, \quad x > 0$$

4. (a) Test for convergence, the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\sqrt{n^3+3} - \sqrt{n^3-1}\right\}.$$ 3

(b) Find the limit as $n \to \infty$, of the sum

$$\frac{1}{8n} + \frac{n^2}{(2n+1)^3} + \frac{n^2}{(2n+2)^3} + \dots + \frac{n^2}{(3n-1)^3}.$$ 3

(c) Show that the function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, defined by

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_i \in \mathbf{R},$$

is uniformly continuous over [a, b]. 4

5. (a) Let $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, be defined by

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{when } x \neq 0 \\ 0, & \text{when } x = 0. \end{cases}$$

Show that $f''(0)$ exists. Also find its value. 5

(b) Obtain the values of x for which the series

$$\sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (4n-2)} \frac{x^{2n}}{4n}, \ (x > 0)$$

is convergent. 5

6. (a) Check whether or not the function f, defined by $f(x) = |1 + \sin 2x|$, is periodic. *2*

(b) Show that the function $f : [3, 5] \to \mathbf{R}$, defined by $f(x) = \frac{[x]}{4x - 3}$, where $[x]$ denotes the greatest integer function, is discontinuous at a finite number of points. *3*

(c) Let f and g be two real-valued functions defined on $[a, b]$ such that f is Riemann integrable, g is differentiable and $g'(x) = f(x)$ for all $x \in [a, b]$. Show that : *5*

$$\int_a^b f(x)\, dx = g(b) - g(a).$$

7. Which of the following statements are true ? Give reasons for your answers. *10*

(a) Every countable set is an open set.

(b) Every subsequence of a divergent sequence is divergent.

(c) If the sum of two functions is continuous, then each of these functions must be continuous.

(d) If a function $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ is continuous on $[a, b]$ and derivable on $]a, b[$, then $f(a) = f(b)$.

(e) If (f_n) is a uniformly convergent sequence, then (f_n) is pointwise convergent.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2022

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न सं. **7 अनिवार्य** है । प्रश्न सं. **1** से **6** में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. (क) दिखाइए कि sin 2x के मैक्लॉरिन श्रेणी प्रसार में लग्रांज रूप का अवशेष $R_n(x)$ शून्य को अग्रसर होता है जब $n \to \infty$. आगे sin 2x का मैक्लॉरिन अनंत प्रसार प्राप्त कीजिए । *5*

(ख) जाँच कीजिए कि

$$a_1 = \frac{4}{3}, \; a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}, \; n \geq 1$$

से परिभाषित अनुक्रम (a_n) (i) परिबद्ध, (ii) एकदिष्ट और (iii) अभिसारी है या नहीं । *5*

2. (क) $f(x) = [2x] + |x - 3|, \; x \in [2, 4]$

द्वारा परिभाषित फलन f का ग्राफ बनाइए । *3*

(ख) वाइएर्स्ट्रास M-परीक्षण का प्रयोग करते हुए दिखाइए कि निम्नलिखित श्रेणी एकसमानतः अभिसरण करती है : *4*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n, \; x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$$

(ग) a और b इस तरह ज्ञात कीजिए कि

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{a \tan x + bx}{x^3}\right)$$

का अस्तित्व हो । *3*

3. (क) जाँच कीजिए कि

$$f(x) = \begin{cases} -5, & x \text{ परिमेय है} \\ 0, & x \text{ अपरिमेय है,} \end{cases}$$

से परिभाषित फलन f, [0, 4] पर समाकलनीय है या नहीं । *4*

(ख) यह दिखाने के लिए कि

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 0,$$

$\varepsilon - \delta$ परिभाषा का प्रयोग कीजिए । *3*

(ग) दिखाइए कि : *3*

$$\sin x > x - \frac{1}{6}x^3, \; x > 0$$

4. (क) श्रेणी

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\sqrt{n^3+3} - \sqrt{n^3-1}\right\}$$

के अभिसरण की जाँच कीजिए । *3*

(ख) योगफल

$$\frac{1}{8n} + \frac{n^2}{(2n+1)^3} + \frac{n^2}{(2n+2)^3} + \dots + \frac{n^2}{(3n-1)^3}$$

की सीमा $n \to \infty$ पर ज्ञात कीजिए । *3*

(ग) दिखाइए कि

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_i \in \mathbf{R}$$

द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $[a, b]$ पर एकसमानत: संतत है । *4*

5. (क) मान लीजिए $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{जब } x \neq 0 \\ 0, & \text{जब } x = 0 \end{cases}$$

से परिभाषित है । दिखाइए कि $f''(0)$ का अस्तित्व है । इसका मान भी ज्ञात कीजिए । *5*

(ख) x के वह मान प्राप्त कीजिए जिनके लिए श्रेणी

$$\sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (4n-2)} \frac{x^{2n}}{4n}, \ (x > 0)$$

अभिसारी है । *5*

6. (क) जाँच कीजिए कि $f(x) = |1 + \sin 2x|$ द्वारा परिभाषित फलन f आवर्ती है या नहीं । *2*

(ख) दिखाइए कि $f(x) = \frac{[x]}{4x - 3}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : [3, 5] \to \mathbf{R}$, बिन्दुओं की परिमित संख्या पर असंतत है, जहाँ [x] महत्तम पूर्णांक फलन को दर्शाता है । *3*

(ग) मान लीजिए f और g, [a, b] पर परिभाषित दो वास्तविक मान फलन इस प्रकार हैं कि f रीमान समाकलनीय है, g अवकलनीय है और सभी $x \in [a, b]$ के लिए $g'(x) = f(x)$ । दिखाइए कि : *5*

$$\int_a^b f(x)\, dx = g(b) - g(a).$$

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं ? अपने उत्तरों के कारण दीजिए । *10*

(क) प्रत्येक गणनीय समुच्चय एक विवृत समुच्चय होता है ।

(ख) एक अपसारी अनुक्रम का प्रत्येक उप-अनुक्रम अपसारी होता है ।

(ग) यदि दो फलनों का योगफल संतत है, तो इनमें से प्रत्येक फलन संतत होना चाहिए ।

(घ) यदि कोई फलन $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, [a, b] पर संतत है और]a, b[पर अवकलनीय है, तो $f(a) = f(b)$.

(ङ) यदि (f_n) एकसमानतः अभिसारी अनुक्रम है, तो (f_n) बिंदुशः अभिसारी होगा ।