

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)
Term-End Examination
June, 2022

MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

***Note :** Question no. 7 is **compulsory**. Answer any **four** questions from questions no. 1 to 6. Use of calculators is **not** allowed.*

1. (a) Check whether the set

$$S = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 \geq 0\}$$

is a subspace of \mathbb{R}^n or not. 3

(b) If v_1, v_2, v_3 are linearly independent vectors in a vector space over \mathbf{C} , then show that $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1$ are also linearly independent. 2

(c) Let $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, -2), (-1, -1, 0)\}$ be a basis of \mathbb{R}^3 . Find the dual basis for B . 5

2. (a) Let T be a linear operator on \mathbb{R}^3 , for which the matrix in the standard ordered B is :

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Find the range of T and null space of T . 5

- (b) Find the adjoint of the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Hence find its inverse. 5

3. (a) Let T be the linear operator on \mathbb{R}^3 defined by $T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3)$.

Find the matrix A of T with respect to the standard basis. Check whether T is invertible or not. If 'yes', find the inverse of A by row reduction. If T is not invertible, find $\text{Ker}(T)$. 5

- (b) Reduce the conic

$$5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 = a$$

to standard form and hence identify it. Also find the associated coordinate transformation. 5

4. (a) Let (V, \langle, \rangle) be an inner product space and let $T \in A(V)$. Prove that the following conditions are equivalent : 4

(i) $T^* T = I$

(ii) $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ for all $x, y \in V$

(iii) $\|Tx\| = \|x\|$ for all $x \in V$

(b) Find the eigenvalues and bases for the eigenspaces of the matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Is the matrix diagonalisable ? 5

(c) Check whether the matrix $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ is unitary. 1

5. (a) Find the minimal polynomial of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}. \quad 3$$

(b) Complete the set $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ to form a basis of \mathbb{R}^3 . Convert this into an orthonormal basis with respect to the standard inner product using the Gram-Schmidt orthogonalisation process. 5

(c) Let W_1 and W_2 be the subspaces of a finite dimensional vector space V . Show that, if $\dim(W_1) + \dim(W_2) > \dim(V)$, then $\dim(W_1 \cap W_2) \neq 0$. 2

6. (a) Find the radius of the circular section of the sphere $|r| = 15$ by the plane $\mathbf{r}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = 12\sqrt{3}$. 3
- (b) In \mathbb{R}^3 , let $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ and $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_3\}$. Check whether W_1 and W_2 are subspaces of \mathbb{R}^3 or not. Also find $W_1 \cap W_2$. 4
- (c) Let a quadratic form have expression $3x^2 + 6xy - 5y^2$ with respect to the standard basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$ of \mathbb{R}^3 . Find its expression with respect to the basis $\{(2, 1), (1, -2)\}$. 3
7. Which of the following statements are *True* and which are *False*? Justify your answer with a short proof or by a counter-example. 5×2=10
- (a) The eigenvalues of a self adjoint operator on an inner product space are all real.
- (b) Every unitary matrix is Hermitian.
- (c) If $S_1 \subseteq S_2$ are subsets of a vector space and S_1 is linearly independent, S_2 is also linearly independent.
- (d) For any linear transformation $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\text{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- (e) There is a linear operator T with characteristic polynomial $(x - 1)^2(x - 2)$ and minimal polynomial $(x - 1)^2$.
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2022

एम.टी.ई.-02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट: प्रश्न सं. 7 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) जाँच कीजिए कि समुच्चय

$$S = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 \geq 0\},$$

\mathbb{R}^n की उपसमष्टि है या नहीं।

3

(ख) यदि v_1, v_2, v_3 , \mathbb{C} पर सदिश समष्टि में रैखिकतः स्वतंत्र सदिश हैं, तब दिखाइए कि $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1$ भी रैखिकतः स्वतंत्र हैं।

2

(ग) मान लीजिए

$$B = \{(1, 0, 1), (0, 1, -2), (-1, -1, 0)\}, \mathbb{R}^3$$

का आधार है। तब B का द्वैत आधार ज्ञात कीजिए।

5

2. (क) मान लीजिए T , \mathbb{R}^3 पर रैखिक संकारक है, जिसके लिए मानक क्रमित आधार B के सापेक्ष आव्यूह है :

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

T का परिसर और T की शून्य समष्टि ज्ञात कीजिए । 5

- (ख) निम्नलिखित आव्यूह का सहखंडज ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

इस तरह इसका प्रतिलोम ज्ञात कीजिए । 5

3. (क) मान लीजिए रैखिक संकारक T , \mathbb{R}^3 पर

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3)$$

द्वारा परिभाषित है । मानक आधार के सापेक्ष T का आव्यूह A ज्ञात कीजिए । जाँच कीजिए कि T व्युत्क्रमणीय है या नहीं । यदि 'है', तो पंक्ति समानयन द्वारा A का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए । यदि T व्युत्क्रमणीय नहीं है, तो $\text{Ker}(T)$ ज्ञात कीजिए । 5

- (ख) शंकु $5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 = a$ को मानक रूप में समानीत कीजिए और इस तरह इसे पहचानिए । संबंधित निर्देशांक रूपांतरण भी ज्ञात कीजिए । 5

4. (क) मान लीजिए (V, \langle, \rangle) एक आंतर गुणनफल समष्टि है और $T \in A(V)$. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित प्रतिबंध तुल्य हैं : 4

(i) $T^* T = I$

(ii) सभी $x, y \in V$ के लिए $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$

(iii) सभी $x \in V$ के लिए $\|Tx\| = \|x\|$

(ख) आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

के आइगेनमान और आइगेन समष्टियों के लिए आधार ज्ञात कीजिए। क्या आव्यूह विकर्णतः है ? 5

(ग) जाँच कीजिए कि आव्यूह $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ ऐकिक है या नहीं। 1

5. (क) निम्नलिखित आव्यूह का अल्पिष्ठ बहुपद ज्ञात कीजिए : 3

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(ख) \mathbb{R}^3 का आधार बनाने के लिए समुच्चय $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ को पूरा कीजिए। ग्राम-शिमिट लांबिकीकरण प्रक्रम का प्रयोग करके मानक आंतर गुणनफल के सापेक्ष इस आधार को प्रसामान्य कीजिए। 5

(ग) मान लीजिए W_1 और W_2 परिमित विमीय सदिश समष्टि V की उपसमष्टियाँ हैं। दिखाइए यदि

$$\dim(W_1) + \dim(W_2) > \dim(V),$$

तब $\dim(W_1 \cap W_2) \neq 0$. 2

6. (क) समतल $\mathbf{r}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = 12\sqrt{3}$ द्वारा गोले $|r| = 15$ के वृत्तीय परिच्छेद की त्रिज्या ज्ञात कीजिए । 3
- (ख) \mathbb{R}^3 में, मान लीजिए
 $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ और
 $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_3\}$. जाँच कीजिए कि
 W_1 और W_2 , \mathbb{R}^3 की उपसमष्टियाँ हैं या नहीं ।
 $W_1 \cap W_2$ भी ज्ञात कीजिए । 4
- (ग) मान लीजिए एक द्विघाती समघात का \mathbb{R}^3 के मानक आधार $\{(1, 0), (0, 1)\}$ के सापेक्ष व्यंजक $3x^2 + 6xy - 5y^2$ है । आधार $\{(2, 1), (1, -2)\}$ के सापेक्ष इसका व्यंजक ज्ञात कीजिए । 3

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? लघु उपपत्ति या प्रत्युदाहरण द्वारा अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 5×2=10

- (क) आंतर गुणनफल समष्टि पर स्वसंलग्न संकारक के सभी आइगेनमान वास्तविक होते हैं ।
- (ख) प्रत्येक ऐकिक आव्यूह हर्मिटी होता है ।
- (ग) यदि $S_1 \subseteq S_2$ सदिश समष्टि के उपसमुच्चय हैं और S_1 रैखिकतः स्वतन्त्र है, तब S_2 भी रैखिकतः स्वतन्त्र होगा ।
- (घ) किसी भी रैखिक रूपांतरण $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ के लिए $\text{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- (ङ) अभिलक्षणिक बहुपद $(x - 1)^2(x - 2)$ और अल्पिष्ठ बहुपद $(x - 1)^2$ वाला एक रैखिक रूपांतरण T होता है ।