

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)****Term-End Examination****June, 2022****ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-11 : PROBABILITY AND STATISTICS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50**(Weightage : 70%)*

Note : *Question no. 7 is compulsory. Attempt any four questions from questions no. 1 to 6. Use of calculators is not allowed. All the symbols have their usual meaning.*

1. (a) Consider the exponential distribution whose probability distribution :

$$f(x) = \theta e^{-\theta x}, \theta > 0, x \geq 0$$

Obtain the maximum likelihood estimator for θ .

4

- (b) For the given distribution function :

$$F(x) = \begin{cases} 0; & \text{if } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2}; & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

Sketch the graph of F and compute :

4

(i) $P\left[-\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{2}\right]$

(ii) $P[0 < X < 2]$

(iii) $P[X = 4]$

- (c) A committee of four has to be formed from among 3 economists, 4 engineers, 2 statisticians and 1 doctor. What is the probability that each of the four professions is represented on the committee ?

2

2. (a) For some bivariate data, the following results were obtained :

Mean value of variable $X = 53.2$ and of $Y = 39.5$. Regression coefficient of Y on $X = -1.5$ and X on $Y = -0.38$. What should be the most likely value of X when $Y = 50$? Also, find the coefficient of correlation between the variables.

4

- (b) In a bolt factory, machines A, B and C manufacture respectively 25%, 35% and 40% of the total output. Of their output, respectively 5%, 4% and 2% are known to be defective. A bolt is picked up at random and is found to be defective. Find the probability that it is produced by

6

(i) machine B.

(ii) machine A.

3. (a) The following table gives the number of road accidents in a city that occurred during different days of a week.

<i>Day</i>	<i>No. of Accidents</i>
Monday	14
Tuesday	15
Wednesday	8
Thursday	20
Friday	11
Saturday	9
Sunday	14

Test whether the accidents are uniformly distributed over the week at 5% level of significance. [Given that $\chi_{0.01, 6}^2 = 16.81$, $\chi_{0.05, 6}^2 = 12.92$]

6

- (b) The joint probability distribution of random variables X and Y is given in the following table :

X \ Y	Y	1	2	3
	X	1	2	3
1	1	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{18}$
2	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$
3	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$

- (i) Find marginal distributions of X and Y.
(ii) Find $P[X + Y > 5]$.

4

4. (a) Construct a frequency distribution of the marks obtained by 25 students in statistics as given below. [Take the first class interval as 10 – 20]

42 65 63 47 58 20 42 55 15 52 40 55 46
35 50 42 75 49 35 30 65 75 65 26 12

Also, draw the histogram.

4

- (b) An incomplete distribution is given below :

<i>Class</i>	<i>Frequency</i>
0 – 10	10
10 – 20	20
20 – 30	?
30 – 40	40
40 – 50	?
50 – 60	25
60 – 70	15
Total	170

Find out missing frequencies if median value is 35.

6

5. (a) Use Chebyshev's inequality to obtain the lower bound for $P[-1 < X < 9]$, if the $E(X) = 4$ and $E(X^2) = 20$.

3

- (b) If X is a normal variate with mean 30 and standard deviation 4, then find :

4

(i) $P[26 < X < 40]$

(ii) $P(|X - 30| < 5)$

[You may like to use the values : $\phi(2) = 0.9772$, $\phi(2.5) = 0.9938$]

- (c) A random variable X takes values $-1, 0, 2$ and 3 with probabilities $0.27, 0.12, 0.26$ and 0.35 , respectively. Show that $E(X + 1) - E(X) = 1$. 3

6. (a) If the probability that an individual suffers from a bad reaction by an injection of given serum is 0.002 , determine the probability that out of 500 individuals :

(i) exactly 3 , and

(ii) more than 1

individuals suffer from bad reaction. 3

- (b) Let X_1, X_2, \dots, X_n be a random sample from a distribution whose p.m.f. is given by :

$$P[X = x] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}; x = 0, 1, 2 \dots n.$$

Show that $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ is unbiased for λ . 3

- (c) Let X_1 be a random sample of size 1 from a population with p.d.f.

$$f(x) = \theta e^{-\theta x}; x > 0, \theta > 0.$$

Obtain critical region of size α for testing $H_0 : \theta = \theta_0$ against $H_1 : \theta = \theta_1$ ($\theta_1 > \theta_0$). 4

7. Which of the following statements are *true* or *false* ? Give reasons for your answer. $5 \times 2 = 10$

- (a) If $H : \sigma^2 > 2$, where σ^2 is the variance of a normal population with mean zero, then the hypothesis is simple.
- (b) If X , a random variable, follows t-distribution with 5 degrees of freedom, then $Y = X^2$ has the F distribution with 1 and 25 degrees of freedom.
- (c) The distribution :

x	1	2	3	4
f(x)	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

represents a probability distribution of a random variable X .

- (d) If X and Y are two independent binomial variates with parameters (n_1, p) and (n_2, p) respectively, then $X + Y$ is a binomial variate with parameters $(n_1 + n_2, 2p)$.
- (e) The point of intersection of 'less than' ogive and 'more than' ogive is mean.
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2022

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-11 : प्रायिकता और सांख्यिकी

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50
(भारिता : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 7 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरो का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है। सभी संकेतों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

1. (क) एक चरघातांकीय बंटन लीजिए जिसका प्रायिकता बंटन निम्नलिखित है :

$$f(x) = \theta e^{-\theta x}, \theta > 0, x \geq 0$$

θ के लिए अधिकतम संभाविता आकलक प्राप्त कीजिए।

4

- (ख) निम्नलिखित बंटन फलन के लिए :

$$F(x) = \begin{cases} 0; & \text{यदि } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2}; & \text{यदि } x \geq 1 \end{cases}$$

F का ग्राफ खींचिए और निम्नलिखित ज्ञात कीजिए : 4

(i) $P\left[-\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{2}\right]$

(ii) $P[0 < X < 2]$

(iii) $P[X = 4]$

(ग) 3 अर्थशास्त्री, 4 इंजीनियर, 2 सांख्यिकीविद और 1 डॉक्टर में से 4 की एक समिति बनानी है। वह प्रायिकता क्या है कि चारों व्यवसायों में से प्रत्येक का प्रदर्शन समिति में है ? 2

2. (क) कुछ द्विचर आँकड़ों के लिए, निम्नलिखित परिणाम प्राप्त किए गए :

चर X का माध्य मान = 53.2 और चर Y का माध्य मान = 39.5. X पर Y का समाश्रयण गुणांक = - 1.5 और Y पर X का समाश्रयण गुणांक = - 0.38. Y = 50 के लिए X का अधिकतम संभावित मान क्या होना चाहिए ? चरों के बीच सहसंबंध गुणांक भी ज्ञात कीजिए। 4

(ख) एक बोल्ट बनाने की फैक्टरी में, तीन मशीनें A, B और C क्रमशः कुल उत्पादन का 25%, 35% और 40% उत्पादन करती हैं। उत्पादन में से क्रमशः 5%, 4% और 2% उत्पाद खराब हैं। एक बोल्ट यादृच्छया चुना जाता है और खराब पाया जाता है। वह प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह बोल्ट निम्नलिखित मशीन से बना है : 6

(i) मशीन B

(ii) मशीन A

3. (क) एक सप्ताह के अलग-अलग दिनों में एक शहर में होने वाली सड़क दुर्घटनाओं की संख्या निम्नलिखित तालिका में दी गई है :

दिन	दुर्घटनाओं की संख्या
सोमवार	14
मंगलवार	15
बुधवार	8
बृहस्पतिवार	20
शुक्रवार	11
शनिवार	9
रविवार	14

5% सार्थकता स्तर पर परीक्षण कीजिए कि दुर्घटनाएँ सप्ताह में एकसमान बंटित हैं । [दिया गया है :

$$\chi_{0.01, 6}^2 = 16.81, \chi_{0.05, 6}^2 = 12.92]$$

6

- (ख) यादृच्छिक चरों X और Y का संयुक्त प्रायिकता बंटन निम्नलिखित है :

X \ Y	1	2	3
	1	$\frac{1}{12}$	0
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$
3	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$

- (i) X और Y के सीमांत बंटन ज्ञात कीजिए ।
(ii) $P[X + Y > 5]$ ज्ञात कीजिए ।

4

4. (क) नीचे दिए गए सांख्यिकी विषय में 25 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों के लिए प्रायिकता बंटन लिखिए ।
[प्रथम वर्ग अंतराल 10 – 20 लीजिए]

42 65 63 47 58 20 42 55 15 52 40 55 46
35 50 42 75 49 35 30 65 75 65 26 12
आयत-चित्र भी बनाइए ।

4

- (ख) एक अधूरा बंटन निम्नलिखित है :

वर्ग	बारंबारता
0 – 10	10
10 – 20	20
20 – 30	?
30 – 40	40
40 – 50	?
50 – 60	25
60 – 70	15
कुल	170

लुप्त बारंबारता ज्ञात कीजिए यदि माध्यक मान 35 है ।

6

5. (क) यदि $E(X) = 4$ और $E(X^2) = 20$ है तो शेबीशेव असमिका का प्रयोग करके $P[-1 < X < 9]$ का निम्न परिबंध निकालिए ।

3

- (ख) यदि X , माध्य 30 और मानक विचलन 4 वाला प्रसामान्य चर है, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

4

(i) $P[26 < X < 40]$

(ii) $P(|X - 30| < 5)$

[आप निम्न मानों का प्रयोग कर सकते हैं :

$\phi(2) = 0.9772$, $\phi(2.5) = 0.9938$]

(ग) एक यादृच्छिक चर X की मानों $-1, 0, 2$ और 3 के लिए प्रायिकताएँ क्रमशः $0.27, 0.12, 0.26$ और 0.35 हैं। दर्शाइए कि $E(X + 1) - E(X) = 1$ है।

3

6. (क) यदि एक सीरम इंजेक्शन के देने से हुई खराब प्रतिक्रिया से किसी व्यक्ति के पीड़ित होने की प्रायिकता 0.002 है, तो 500 व्यक्तियों में से निम्नलिखित के लिए प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

3

(i) ठीक 3 पीड़ित हैं और

(ii) 1 से अधिक पीड़ित हैं।

(ख) मान लीजिए कि X_1, X_2, \dots, X_n एक बंटन का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है, जिसका p.m.f. निम्नलिखित है :

$$P[X = x] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}; x = 0, 1, 2 \dots n.$$

दर्शाइए कि $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, λ के लिए

अनभिन्नत है।

3

(ग) मान लीजिए कि X_1 एक समष्टि से लिया गया आकार 1 का यादृच्छिक प्रतिदर्श है जिसका p.d.f. $f(x) = \theta e^{-\theta x}; x > 0, \theta > 0$ है।

परिकल्पना $H_0 : \theta = \theta_0$, विरुद्ध $H_1 : \theta = \theta_1$ ($\theta_1 > \theta_0$) के परीक्षण के लिए आकार α का क्रांतिक पथ निकालिए।

4

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं अथवा कौन-से असत्य ? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए । 5×2=10

(क) यदि $H : \sigma^2 > 2$ है, जहाँ σ^2 एक माध्य शून्य वाली प्रसामान्य समष्टि का प्रसरण है, तो परिकल्पना साधारण होगी ।

(ख) यदि X एक यादृच्छिक चर, स्वातंत्र्य कोटि 5 वाला t -बंटन है, तो $Y = X^2$ स्वातंत्र्य कोटि 1 और 25 वाला F -बंटन होगा ।

(ग) बंटन

x	1	2	3	4
f(x)	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

यादृच्छिक चर X का एक प्रायिकता बंटन है ।

(घ) यदि X और Y क्रमशः (n_1, p) और (n_2, p) प्राचल वाले दो स्वतंत्र द्विपद चर हैं, तो $X + Y$ प्राचल $(n_1 + n_2, 2p)$ वाला द्विपद चर होगा ।

(ङ) 'से अधिक' तोरण और 'से कम' तोरण का प्रतिच्छेदन बिंदु माध्य होता है ।