

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME  
(BDP)**

**Term-End Examination**

**June, 2022**

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS  
MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS**

*Time : 2 hours*

*Maximum Marks : 50  
(Weightage : 70%)*

**Note :** Answer any **five** questions. All computations may be done up to 3 decimal places. Use of calculators is **not** allowed. Symbols have their usual meanings.

1. (a) Perform four iterations of the Jacobi method for solving

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

with  $\mathbf{x}^{(0)} = [0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 0.5]^T$ . 6

- (b) Prove that a matrix is singular if and only if it has a zero eigenvalue. 4

2. (a) The following table gives the values of  $f(x) = e^x$ . If we fit an interpolating polynomial of degree four to the data, then find the magnitude of the maximum possible error in the computed value of  $f(x)$  when  $x = 1.25$ .

6

x	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
f(x)	3.3201	3.6692	4.0552	4.4817	4.9530

- (b) Prove that  $\mu^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4}$ .

4

3. (a) If  $f(x) = \frac{1}{x}$ , show that  $f[a, b, c, d] = \frac{-1}{abcd}$ .

4

- (b) Find the value of  $f'(x)$  at  $x = 0.4$  from the following table :

6

x	0.1	0.2	0.3	0.4
f(x)	1.105	1.221	1.349	1.492

4. (a) Using Euler's method, tabulate the solution of the IVP  $y' = -2ty^2$ ,  $y(0) = 1$  in  $[0, 0.3]$  taking  $h = 0.1$ .

6

- (b) Calculate a bound for the truncation error in approximating  $e^{x^2}$  by

$$e^{x^2} \approx 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} \text{ for } x \in ]-1, 1[. \quad 4$$

5. (a) Find the approximate value of a root of  $x^2 - e^x = 0$  using graphical method. 4

- (b) Suppose  $\alpha$  and  $\beta$  are the roots of the equation  $x^2 + ax + b = 0$ . Consider a rearrangement of this equation as  $x = \frac{b}{x+a}$ . Show that the iteration  $x_{k+1} = \frac{b}{x_k + a}$  will converge to the root  $x = \alpha$ , when  $|\alpha| < |\beta|$ . 6

6. (a) Estimate the eigenvalues of the symmetric matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}. \quad 4$$

- (b) Use the LU decomposition method to solve the system of equations

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$$

$$3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4. \quad 6$$

7. (a) Find the spectral radius of the iteration matrix when the Jacobi method is applied to the system of equations

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Verify that the iterations do not converge to the exact solution  $[1 \ 3 \ -1]^T$ .

7

- (b) Evaluate  $p'(3)$  for the polynomial

$p(x) = 5x^4 - 2x^3 + 4x - 10$  using the Birge-Vieta method.

3

---

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2022

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट: किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी अभिकलन 3 दशमलव स्थानों तक दिए जा सकते हैं । कैल्कुलेटरो के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।

1. (क)  $x^{(0)} = [0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T$  के साथ,

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

को हल करने के लिए जैकोबी विधि की चार पुनरावृत्तियाँ कीजिए ।

6

(ख) सिद्ध कीजिए कि कोई आव्यूह अव्युत्क्रमणीय है यदि और केवल यदि इसका कोई आइगेनमान शून्य है ।

4

2. (क) निम्नलिखित सारणी में  $f(x) = e^x$  के मान दिए गए हैं। यदि हम इन आँकड़ों के लिए घात 4 वाला अंतर्वेशी बहुपद बनाएँ, तो  $x = 1.25$  पर  $f(x)$  के परिकलित मान में अधिकतम संभव त्रुटि का परिमाण ज्ञात कीजिए।

6

x	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
f(x)	3.3201	3.6692	4.0552	4.4817	4.9530

- (ख) सिद्ध कीजिए कि  $\mu^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4}$  है।

4

3. (क) यदि  $f(x) = \frac{1}{x}$  है, तो दिखाइए कि

$$f[a, b, c, d] = \frac{-1}{abcd} \text{ है।}$$

4

- (ख) निम्नलिखित सारणी से  $x = 0.4$  पर  $f'(x)$  का मान ज्ञात कीजिए :

6

x	0.1	0.2	0.3	0.4
f(x)	1.105	1.221	1.349	1.492

4. (क)  $h = 0.1$  लेकर ऑयलर विधि से IVP

$$y' = -2ty^2, \quad y(0) = 1 \text{ के हल को } [0, 0.3] \text{ में सारणीबद्ध कीजिए।}$$

6

(ख)  $e^{x^2}$  को  $x \in ]-1, 1[$  के लिए

$$e^{x^2} \approx 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}$$

द्वारा सन्निकटित करने में रूंडन त्रुटि के लिए एक परिबंध परिकलित कीजिए ।

4

5. (क) ग्राफीय विधि से  $x^2 - e^x = 0$  के एक मूल का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए ।

4

(ख) मान लीजिए  $\alpha$  और  $\beta$  समीकरण  $x^2 + ax + b = 0$  के मूल हैं । इस समीकरण के  $x = \frac{b}{x+a}$  पुनः व्यवस्थित रूप पर गौर कीजिए । दिखाइए कि पुनरावृत्ति

$x_{k+1} = \frac{b}{x_k + a}$  मूल  $x = \alpha$  को अभिसरित होती है जब  $|\alpha| < |\beta|$  हो ।

6

6. (क) सममित आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

के आइगेनमानों का आकलन कीजिए ।

4

(ख) समीकरण निकाय

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$$

$$3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4$$

को LU वियोजन विधि से हल कीजिए ।

6

7. (क) जब समीकरण निकाय

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

पर जैकोबी विधि लागू की जाती है, तो पुनरावृत्ति आव्यूह की स्पेक्ट्रमी त्रिज्या ज्ञात कीजिए। सत्यापित कीजिए कि पुनरावृत्तियाँ यथातथ हल  $[1 \ 3 \ -1]^T$  को अभिसरित नहीं होतीं।

7

(ख) बहुपद  $p(x) = 5x^4 - 2x^3 + 4x - 10$  के लिए बर्ज-विष्टा विधि से  $p'(3)$  का मान ज्ञात कीजिए।

3

---