

No. of Printed Pages : 10

**MTE-08**

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME  
(BDP)**

**Term-End Examination**

**June, 2022**

**(MATHEMATICS)**

**MTE-08 : DIFFERENTIAL EQUATIONS**

*Time : 2 Hours*

*Maximum Marks : 50*

---

**Note :** (i) *Question No. 1 is compulsory.*

(ii) *Answer any **four** questions from the remaining Question Nos. 2 to 7.*

(iii) *Use of calculators is not allowed.*

---

---

1. State whether the following statements are True or False. Justify your answer with the help of a short proof or a counter-example :

$$5 \times 2 = 10$$

- (i) The IVP  $xy' = y - 2$ ,  $y(0) = 2$  has a unique solution.

**P. T. O.**

(ii) The differential equation :

$$y^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + 2x^2 u_{yy} + yu_y = 0$$

is elliptic for  $x \neq 0, y \neq 0$ .

(iii) The differential equation :

$$(xy^2 + x) dx + yx^2 dy = 0$$

is not exact.

(iv) The equation  $xpq + yq = yz$  is a linear P. D. E.

(v) The differential equation :

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} - xyu = x$$

is an example of a non-homogeneous first order linear partial differential equation.

2. (a) Solve the equation : 3

$$(2xy - \sin x) dx + (x^2 - \cos y) dy = 0$$

(b) Use the method of undetermined coefficients to find the general solution of the differential equation : 4

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 3e^{-x} - 10 \cos 3x$$

(c) Solve the differential equation : 3

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2 \ln x$$

3. (a) Use the method of variation of parameters to solve the differential equation : 5

$$y'' + 3y' + 2y = 30e^{2x}$$

- (b) Find the integral curves of the differential equations : 5

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x-y}$$

4. (a) Find the complete integral of the differential equation : 5

$$p^2 + px + q = z$$

- (b) Solve the differential equation : 5

$$\left( x^2 D^2 - 2xy DD' + y^2 D'^2 - xD + 3yD' \right) z = \frac{y}{x}$$

5. (a) Solve the Laplace equation :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

satisfying the boundary conditions : 6

$$\phi = 0, \text{ when } y \rightarrow \infty$$

$$\phi = 0, \text{ when } x = 0$$

$$\phi = 0, \text{ when } x = 1$$

$$\phi = x, \text{ when } y = 0, \quad 0 < x < 1$$

(b) Solve : 4

$$(D^4 + 2D^3 - 3D^2)y = x^2 + 3e^{2x} + 4 \sin x$$

6. (a) Verity that the differential equation :

$$(2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1) dx + dy + 2zdz = 0$$

is integrable. Find its integral using the method of solving Pfaffian differential equations. 6

(b) Solve the differential equation : 4

$$(D^3 + D^2D' - DD'^2 - D'^3)z = e^y \cos 2x$$

7. (a) In a certain culture of bacteria the number of bacteria increased six fold in 10 hours. How long will it take for the population to double ? Justify. 5

(b) Find the solution of the equation :

$$(y - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (z - x) \frac{\partial z}{\partial y} = x - y$$

with  $z = 0$  at  $xy = 1$ . 5

**MTE-08**

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

( बी. डी. पी. )

सत्रांत परीक्षा

जून, 2022

( गणित )

एम. टी. ई.-08 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

**नोट :** (i) प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न सं. 2 से 7 तक किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iii) कैलकुलेटरो के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं **या** असत्य।  
संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रत्युदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए : 5×2=10

(i) आदिमान समस्या  $xy' = y - 2, y(0) = 2$  का एक अद्वितीय हल है।

(ii) अवकल समीकरण :

$$y^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + 2x^2 u_{yy} + yu_y = 0,$$

$x \neq 0, y \neq 0$  के लिए दीर्घवृत्तीय है।

(iii) अवकल समीकरण :

$$(xy^2 + x) dx + yx^2 dy = 0$$

यथातथ नहीं है।

(iv) समीकरण  $xpq + yq = yz$  एक रैखिक P. D. E. है।

(v) अवकल समीकरण :

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} - xyu = x$$

एक कोटि असमघात रैखिक आंशिक अवकल समीकरण का एक उदाहरण है।

2. (क) समीकरण :

3

$$(2xy - \sin x) dx + (x^2 - \cos y) dy = 0$$

को हल कीजिए।

(ख) अनिर्धारित गुणांक विधि का प्रयोग करके अवकल

समीकरण : 4

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 3e^{-x} - 10\cos 3x$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

(ग) अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2 \ln x$$

को हल कीजिए। 3

3. (क) प्राचल विचरण विधि का प्रयोग करके अवकल

समीकरण को हल कीजिए : 5

$$y'' + 3y' + 2y = 30e^{2x}$$

(ख) अवकल समीकरणों :

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x-y}$$

के समाकल वक्र ज्ञात कीजिए। 5

4. (क) अवकल समीकरण : 5

$$p^2 + px + q = z$$

का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।

- (ख) अवकल समीकरण : 5

$$(x^2D^2 - 2xyDD' + y^2D'^2 - xD + 3yD')z = \frac{y}{x}$$

को हल कीजिए।

5. (क) लाप्लास समीकरण

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

को हल कीजिए, जिसके परिसीमा प्रतिबंध हैं : 6

$$\phi = 0, \text{ जब } y \rightarrow \infty$$

$$\phi = 0, \text{ जब } x = 0$$

$$\phi = 0, \text{ जब } x = 1$$

$$\phi = x, \text{ जब } y = 0, \quad 0 < x < 1$$



(ख) हल कीजिए : 4

$$(D^4 + 2D^3 - 3D^2)y = x^2 + 3e^{2x} + 4 \sin x$$

6. (क) सत्यापित कीजिए कि अवकल समीकरण :

$$(2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1) dx + dy + 2zdz = 0$$

समाकलनीय है। पैफियन अवकल समीकरणों को हल करने की विधि से इसका समाकल ज्ञात कीजिए। 6

(ख) अवकल समीकरण को हल कीजिए : 4

$$(D^3 + D^2D' - DD'^2 - D'^3)z = e^y \cos 2x$$

7. (क) जीवाणुओं के किसी संवर्धन में, जीवाणुओं की संख्या 10 घण्टे में 6 गुना बढ़ जाती है। जनसंख्या को दगुना होने में कितना समय लगेगा ? पुष्टि कीजिए। 5

(ख) समीकरण :

$$(y - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (z - x) \frac{\partial z}{\partial y} = x - y$$

जहाँ  $xy = 1$  पर  $z = 0$  है, का हल ज्ञात

कीजिए।

5