No. of Printed Pages : 12

# MTE-07

## BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

## Term-End Examination

## June, 2022

### MTE-07 : ADVANCED CALCULUS

*Time : 2 Hours* *Maximum Marks : 50*

***Note :*** *(i) Question* ***No. 1*** *is compulsory.*

*(ii) Attempt any* ***four*** *questions out of the remaining questions (2 to 7).*

*(iii) Use of calculator is not allowed.*

1. State whether the following statements are true *or* false. Give a short proof or a counter-example in support of your answer : 5×2=10

   (a) Existence of partial derivatives at a given point is a necessary condition for a function $f$ from $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ to be continuous at that point.

(b) The function $f$, defined by :

$$f(x, y) = x^3 + 4xy + y^5$$

is integrable over $[3, 4] \times [5, 6]$.

(c) If $]-\infty, a[ \cap ]b, \infty[ = \phi$, then $a < b$.

(d) The set $\{(x, y) : y = 6x + 5\}$ is not polygonally connected.

(e) Solve :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1.$$

2. (a) Find the area of the region D in $\mathbf{R}^2$, bounded by the parabolas $y = 5 - x^2$ and $y = x^2 + 3$. 4

(b) Show that the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ defined by $f(x, y) = (2xy, x^2 - y^2)$ is not an invertible function. Find, if any, points in $\mathbf{R}^2$ at which $f$ is locally invertible. 3

(c) Evaluate : 3

$$\lim_{x \to \infty} \left( \sqrt{4x^2 + 5x - 7} - \sqrt{4x^2 + 3x + 9} \right)$$

3. (a) Let $x = e_1 + 3e_2 - 7e_3$, $y = 2e_1 + 9e_2 - 4e_3$, where $e_1, e_2$ and $e_3$ are unit vectors in $\mathbf{R}^3$. Find $|3x - y + z|$, where $z = (1, 1, 1)$. 3

(b) Prove that the function $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ defined by $f(x, y, z) = 2x - 5y + 7z$ is differentiable everywhere. 3

(c) Find the second Taylor polynomial of the function $f(x, y) = \cos(3x + 5y)$ at the point $(0, 0)$. 4

4. (a) Evaluate the following by converting into cylindrical coordinates : 5

$$\iiint_W \frac{z}{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz$$

where :

$$W = \{(x, y, z) : 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3, 1 \leq z \leq 5\}$$

(b) Evaluate : 5

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x} - \cos 5x - 5x}{5x^2}$

(ii) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x}$

5. (a) Let a function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ be defined by :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{x} + 3y, & x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 \quad , & \text{otherwise} \end{cases}$$

Examine the existence of the first order partial derivatives at the points (0, 1) and (1, 0). 4

(b) Check whether the following integrals are independent of path, and evaluate those which are independent : 6

(i) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (7x^3 + 2y^2)\, dx + (4xy + y^3)\, dy$

(ii) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (4xy + y^3)\, dx + (7x^3 + 2y^2)\, dx$

6. (a) Let :

$$S = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\right\}$$

and $C = \{(x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2, -2 \leq z \leq 2\}$.

Show that $C \subseteq S$. 2

(b) Prove that the function :

$$g(x, y) = \frac{4x + 5y}{2x - 3y}$$

and $f(x, y) = \frac{x}{y}$,

$y \neq 0, y \neq \frac{2x}{3}$ are functionally dependent.

3

(c) Evaluate :

$$\iiint_W \sqrt{2x + 3y + 5z}\, dx\, dy\, dz$$

where W is described by $0 \leq 2x + 3y + 5z \leq 4$; $1 \leq 2x + y \leq 7$, $2 \leq y - 3z \leq 6$. 5

7. (a) Define the following function $f : D \to \mathbf{R}$ given by :

$$f(x, y) = \sin^{-1} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

where $D = \{(x, y) : x \geq 1, y \geq 1\} \subseteq \mathbf{R}^2$.

Prove that $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. 2

(b) Calculate all the second order partial derivatives for the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ defined by $f(x, y) = e^{5x+7y} + \cos xy$. 3

(c) Find the minimum value of $x^2 + 2y^2$ subject to the condition $x + 3y = 11$ using Lagrange's method of multipliers. 5

# MTE-07

## स्नातक उपाधि कार्यक्रम ( बी. डी. पी. )

## सत्रांत परीक्षा

## जून, 2022

## एम. टी. ई.-07 : उच्च कलन

*समय : 2 घण्टे* *अधिकतम अंक : 50*

---

**नोट :** *(i) प्रश्न सं. **1 अनिवार्य** है।*

*(ii) शेष **2** से **7** तक किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

*(iii) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।*

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं **या** असत्य। अपने उत्तर के पक्ष में लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए : $5\times2=10$

   (क) किसी दिए गए बिन्दु पर किसी फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ के संतत होने के लिए उस बिन्दु पर आंशिक अवकलज का अस्तित्व होना अनिवार्य प्रतिबंध है।

(ख) $f\ (x,\ y)\ =\ x^3 + 4xy + y^5$ द्वारा परिभाषित फलन $f$, $[3, 4] \times [5, 6]$ पर समाकलनीय है।

(ग) यदि $]-\infty, a[ \cap ]b, \infty[ = \phi$, तब $a < b$।

(घ) समुच्चय $\{(x, y) : y = 6x + 5\}$ पॉलीगोनली कनेक्टिड नहीं है।

(ङ) हल कीजिए :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1.$$

2. (क) परवलय $y = 5 - x^2$ और $y = x^2 + 3$ द्वारा परिबद्ध $\mathbf{R}^2$ में प्रदेश D का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 4

(ख) दिखाइए कि $f(x, y) = (2xy, x^2 - y^2)$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ व्युत्क्रमणीय नहीं है। यदि कोई हो, तो $\mathbf{R}^2$ मं ऐसे बिन्दु ज्ञात कीजिए, जिस पर $f$ स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय है। 3

(ग) $\lim_{x \to \infty} \left( \sqrt{4x^2 + 5x - 7} - \sqrt{4x^2 + 3x + 9} \right)$ का मूल्यांकन कीजिए।

3. (क) मान लीजिए कि $x = e_1 + 3e_2 - 7e_3$, $y = 2e_1 + 9e_2 - 4e_3$, जहाँ $e_1, e_2$ एवं $e_3$ $\mathbf{R}^3$ में एकक सदिश हैं। $|3x - y + z|$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $z = (1, 1, 1)$। 3

(ख) सिद्ध कीजिए कि फलन :

$$f(x, y, z) = 2x - 5y + 7z$$

द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ सर्वत्र अवकलनीय है। 3

(ग) बिन्दु $(0, 0)$ पर फलन $f(x, y) = \cos(3x + 5y)$ का द्वितीय टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए। 4

4. (क) निम्नलिखित को बेलनी निर्देशांकों में परिवर्तित करके इनका मूल्यांकन कीजिए : 5

$$\iiint_W \frac{z}{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz$$

जहाँ :

$$W = \{(x, y, z) : 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3,\ 1 \leq z \leq 5\}$$

(ख) मान ज्ञात कीजिए : 5

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{5x} - \cos 5x - 5x}{5x^2}$

(ii) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x}$

5. (क) मान लीजिए फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, निम्नलिखित द्वारा परिभाषित है :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{x} + 3y, & x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 \quad , & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

बिन्दुओं $(0, 1)$ और $(1, 0)$ पर प्रथम कोटि आंशिक अवकलज के अस्तित्व की जाँच कीजिए। 4

(ख) जाँच कीजिए कि क्या निम्नलिखित समाकल पथ स्वतंत्र है और जो स्वतंत्र हैं उनका मूल्यांकन कीजिए : 6

(i) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (7x^3 + 2y^2)\, dx + (4xy + y^3)\, dy$

(ii) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (4xy + y^3)\, dx + (7x^3 + 2y^2)\, dx$

6. (क) मान लीजिए : 2

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\}$$

और

$$C = \{(x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2, -2 \leq z \leq 2$$

दिखाइए कि $C \subseteq S$।

(ख) सिद्ध कीजिए कि फलन :

$$g(x, y) = \frac{4x + 5y}{2x - 3y}$$

और $f(x, y) = \frac{x}{y}, y \neq 0, y \neq \frac{2x}{3}$

फलनिकत: आश्रित हैं। 3

(ग) $\iiint_W \sqrt{2x + 3y + 5z}\, dx\, dy\, dz$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ W $0 \leq 2x + 3y + 5z \leq 4$; $1 \leq 2x + y \leq 7$, $2 \leq y - 3z \leq 6$ द्वारा वर्णित है। 5

7. (क) निम्नलिखित परिभाषित फलन $f : \mathrm{D} \to \mathbf{R}$ लीजिए :

$$f(x, y) = \sin^{-1} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

जहाँ $\mathrm{D} = \{(x, y) : x \geq 1, y \geq 1\} \subseteq \mathbf{R}^2$। सिद्ध कीजिए कि $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$। 2

(ख) $f(x, y) = e^{5x+7y} + \cos xy$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ के लिए द्वितीय कोटि आंशिक अवकलज परिकलित कीजिए। 3

(ग) लैग्रांज गुणक विधि से प्रतिबंध $x + 3y = 11$ के अधीन $x^2 + 2y^2$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। 5