No. of Printed Pages : 15

BMTC-131

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2022

BMTC-131 : CALCULUS

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : *(i) All questions/parts of the questions of Section A and Section B are compulsory.*

(ii) Attempt any ***five*** *questions from Section C.*

(iii) Use of calculator is not allowed.

Section—A

1. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer with a short proof or a counter-example, whichever is appropriate : 20

(i) If A = { } and B = {1, 2}, then A × B has two elements.

(ii) If all the roots of a polynomial in $\mathbf{R}[x]$ of degree greater than one are is $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$, then the degree of the polynomial is even.

(iii) If $S \subset \mathbf{R}$, $S \neq \{\}$, then Sup (S) $\in$ S.

(iv) If f and g are functions defined on $]-1, 1[$ and $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ and $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$, then $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

(v) If f and g are defined in an open interval containing x_0, and f and fg are differentiable at x_0, then g is also differentiable at x_0.

(vi) If f is defined in an open interval containing x_0, and f is differentiable at x_0, then f^n is differentiable at x_0 for any $n \in \mathbf{Z}$.

(vii) If f is a real valued function defined on $]a, b[\subset \mathbf{R}$ and $f'(x_0) = 0$ for some $x_0 \in]a, b[$, then f has a local extremum at x_0.

(viii) If f_1 and f_2 are defined on an open interval I containing x_0 and $\lim_{x \to x_0} f_2(x) = 0$, then function f, defined on I by $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, has a veritcal asymptote at $x = x_0$.

(ix) If a function is defined and bounded on a finite interval, it is integrable on that interval.

(x) If f and g are integrable on a finite interval $[a, b]$ then :

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \left(\int_a^b f(x)\, dx\right) \left(\int_a^b g(x)\, dx\right)$$

Section—B

2. (a) Let U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} be the universal set. Let A = {1, 2, 3}, B = {1, 3, 4, 5}, C = {1, 4, 5, 7}. Represent the sets U, A, B and C in a Venn diagram. Also, give the set $(A \cup B) \cap C^c$ using the listing method. 4

(b) Differentiate the following functions : 6

(i) $\sin x \ln(|1 + x|)$

(ii) $\frac{\cos x}{1 + x^2}$

(iii) $\tan^{-1}(1 + \cos^2 2x)$

3. (a) Solve the following equations : 5

(i) $3^{x^2 - 3x} = \frac{1}{9}$

(ii) $\ln(x^2 + 3) = \ln|5x - 1| - \ln x$,

$x > 0, x \neq \frac{1}{3}$

(b) Integrate the following : 5

(i) $\int e^{\sec x} \sec x \tan x\, dx$

(ii) $\int \frac{(x + 1)}{(3x + 1)(2x - 3)}\, dx$

4. (a) If the sum of two roots of the equation :

$$x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 21 = 0$$

is zero, find all the roots of the equation. 7

(b) Investigate the continuity of the function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, defined by :

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2, & \text{if } x < 0 \\ (x+1), & \text{if } x \geq 0 \end{cases}.$$

Also, identity the type of discontinuity of the function, if any. 3

Section—C

5. (a) A spherical balloon is filled with air at the rate of 5 cm^3/sec. Find the rate of increase in radius when the radius is 6 cm. (Volume of a sphere of radius r is $\frac{4}{3}\pi r^3$). 3

(b) Find : 5

$$\int_x^{x^3} \left(t^3 + t\right) dt$$

(c) If $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ and $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ are defined by $f(x) = x + 5$ and $g(x) = 3x$, find g o f. Check whether g o f is a one-one function. 2

6. (a) Find : 3

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left|\theta - \frac{\pi}{2}\right|}{\tan\theta}$$

(b) Expand $\cos 4\theta$ in powers of $\cos\theta$. 3

(c) If $y = \left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)^n$, derive the relation

$$\left(x^2 + a^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - n^2 y = 0.$$ 4

7. Trace the curve $y^2 = (x-1)^4(x-2)$. State all the properties you use to trace it. 10

8. (a) Show that $\lim_{x \to 2}\left(x^3 - 1\right) = 7$ using the ε-δ definition. 5

(b) Find the area of the region above the line $x = 2$ and bounded by $y^2 = x - 2$. 5

9. (a) Check whether the conditions of Rolle's theorem are satisfied for the function f, defined by $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4$ in the interval [1, 2]. Is the conclusion of the theorem true ? Give reasons for your answer. 4

(b) Find the fourth derivative of $x^2 \sin x$. 3

(c) Check that $f(x) = \cos^2 x$ defines a function $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1]$. Check that the function f is one-one and onto. 3

10. (a) Find the extremum points for the function f, defined by $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 60$. Also find the values of the function at its extremum points. 5

(b) Find $\frac{dy}{dx}$ for the following : 5

(i) $y = x^{\sin x} + (\sin x)^x$

(ii) $3e^x + \cos y = \sin x$

BMTC-131

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2022

बी. एम. टी. सी.-131 : कलन

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *(i)* भाग 'अ' और भाग 'ब' के सभी प्रश्न/प्रश्नों के सभी भाग **अनिवार्य** हैं।

(ii) भाग 'स' से कोई **पाँच** प्रश्न कीजिए।

(iii) कैलकलेटर का प्रयोग करने की अनमति नहीं है।

भाग—अ

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं? अपने उत्तर के पक्ष में एक संक्षिप्त उपपत्ति या प्रति उदाहरण दीजिए : 20

(i) यदि $A = \{\ \}$ और $B = \{1, 2\}$ है, तो $A \times B$ में दो अवयव होंगे।

(ii) यदि $\mathbf{R}$ $[x]$ में एक से अधिक घात वाली बहपद के सभी मल $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ में हैं, तो बहपद की घात सम होगी।

(iii) यदि $S \subset \mathbf{R}$ और $S \neq \{\ \}$ है, तो $\text{Sup}(S) \in S$।

(iv) यदि फलन f और g, $]-1,1[$ पर परिभाषित हैं और $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ और $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$ है, तो $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ होगा।

(v) यदि f और g, एक विवत अंतराल जिसमें x_0 है, पर परिभाषित हैं और f और fg, x_0 पर अवकलनीय है, तो g भी x_0 पर अवकलनीय होगा।

(vi) यदि f एक विवत अंतराल जिसमें x_0 है, पर परिभाषित है और f, x_0 अवकलनीय है, तो f^n किसी भी $n \in \mathbf{Z}$ के लिए x_0 पर अवकलनीय होगा।

(vii) यदि f एक अंतराल $]a,b[\subset \mathbf{R}$ पर परिभाषित वास्तविक मान फलन है, तो f का x_0 पर एक स्थानीय चरममान होगा।

(viii) यदि f_1 और f_2 एक विवत अंतराल I जिसमें x_0 है, पर परिभाषित हैं और $\lim_{x\to x_0} f_2(x) = 0$ है, तो अंतराल I पर $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ द्वारा परिभाषित फलन f की $x = x_0$ पर एक ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी होगी।

(ix) यदि एक फलन, एक परिमित अंतराल में परिभाषित और परिबद्ध है, तो उस अंतराल में समाकलनीय होगा।

(x) यदि f और g परिमित अंतराल $[a,b]$ में समाकलनीय हैं, तो :

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)$$

$$\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

भाग—ब

2. (क) मान लीजिए $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ एक समष्टीय समच्चय है। मान लीजिए $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 4, 5\}$ और $C = \{1, 4, 5, 7\}$ हैं। समच्चयों U, A, B और C को एक वेन आरेख में निरूपित कीजिए। सची-विधि का प्रयोग करके समच्च $(A \cup B) \cap C^c$ निकालिए। 4

(ख) निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए : 6

(i) $\sin x \ln\left(|1 + x|\right)$

(ii) $\dfrac{\cos x}{1 + x^2}$

(iii) $\tan^{-1}\left(1 + \cos^2 2x\right)$

3. (क) निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए : 5

(i) $3^{x^2 - 3x} = \dfrac{1}{9}$

(ii) $\ln\left(x^2 + 3\right) = \ln|5x - 1| - \ln x,$

$x > 0, x \neq \dfrac{1}{3}$

(ख) निम्नलिखित समाकल ज्ञात कीजिए : 5

(i) $\int e^{\sec x} \sec x \tan x \, dx$

(ii) $\int \dfrac{(x + 1)}{(3x + 1)(2x - 3)} dx$

4. (क) यदि समीकरण $x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 21 = 0$ के दो मूलों का योग शून्य है, तो समीकरण के सभी मल ज्ञात कीजिए। 7

(ख) $f(x) = \begin{cases} (x - 2)^2, & \text{यदि } x < 0 \\ (x + 1), & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ की संतत की जाँच कीजिए। असंततत का प्रकार भी बताइए, यदि असंतता है। 3

भाग—स

5. (क) एक गोलाकार गब्बारे में $5\,\text{cm}^3 / \text{sec}$ की दर से हवा भरी जाती है। त्रिज्या में वद्धि की दर ज्ञात कीजिए जबकि त्रिज्या $6\,\text{cm}$ है। (r त्रिज्या के गोले का आयतन $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ होता है।) 3

(ख) $\int_x^{x^3} \left(t^3 + t\right) dt$ का मान ज्ञात कीजिए। 5

(ग) $f(x) = x + 5$ और $g(x) = 3x$ द्वारा परिभाषित फलन क्रमशः $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ और $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ हैं। $g \circ f$ ज्ञात कीजए। जाँच कीजिए कि फलन $g \circ f$, 1-1 है। 2

6. (क) $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln\left|\theta - \frac{\pi}{2}\right|}{\tan\theta}$ ज्ञात कीजिए। 3

(ख) $\cos 4\theta$ का $\cos\theta$ की घातों में विस्तार कीजिए। 3

(ग) यदि $y = \left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)^n$ है, तो संबंध $\left(x^2 + a^2\right)\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - n^2 y = 0$ को व्यत्पन्न कीजिए। 4

7. वक्र $y^2 = (x-1)^4(x-2)$ का अनरेखण कीजिए और अनरेखण में प्रयोग किए गए सभी गणधर्म लिखिए। 10

8. (क) $\in - \delta$ परिभाषा का प्रयोग करके दर्शाइए कि : 5

$$\lim_{x \to 2}\left(x^3 - 1\right) = 7$$

(ख) रेखा $x = 2$ के ऊपर और $y^2 = x - 2$ द्वारा परिबद्ध प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

9. (क) अंतराल $[1, 2]$ में

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4$$

द्वारा परिभाषित फलन f के लिए रौले प्रमेय की सभी शर्तों की जाँच कीजिए। क्या प्रमेय का निष्कर्ष सत्य है ? अपने उत्तर का कारण दीजिए। 4

(ख) $x^2 \sin x$ का चौथा अवकलज ज्ञात कीजिए। 3

(ग) जाँच कीजिए कि $f(x) = \cos^2 x$, फलन $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [0, 1]$ को परिभाषित करता है। जाँच कीजिए कि फलन f, 1-1 और आच्छादक है। 3

10. (क) $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 60$ द्वारा परिभाषित फलन f के चरम बिन्द ज्ञात कीजिए। इन चरम बिन्दओं पर फलन के मान भी ज्ञात कीजिए। 5

(ख) निम्नलिखित के लिए $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए : 5

(i) $y = x^{\sin x} + (\sin x)^x$

(ii) $3e^x + \cos y = \sin x$