BACHELOR OF SCIENCE (GENERAL)
(BSCG/BAG)
Term-End Examination
June, 2022

BMTC-134 : ALGEBRA

Time : 3 hours *Maximum Marks : 100*

Note : *This question paper has three sections – A, B and C. All questions in Section A and Section B are* ***compulsory****. In Section C, do any* ***five*** *questions out of six questions. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

SECTION A (20 Marks)

1. Which of the following statements are *True* or *False* ? Give reasons for your answer. *10×2=20*

(a) $\mathbb{R}$ has a non-trivial subgroup of finite order.

(b) Every non-empty subset of $\mathbb{Z}$ has a least element.

(c) $\mathbb{Z}_{mn} \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, as groups, where $m, n \in \mathbb{N}$.

(d) If G is a cyclic group, then it is isomorphic to each of its proper non-trivial subgroups.

(e) Every ideal of the ring $(R, +, \cdot)$ is a normal subgroup of $(R, +)$.

(f) If S is a subring of a commutative ring R, then S must be an ideal of R.

(g) If R is a field and M is a maximal ideal of R, then $(R/M) \simeq R$.

(h) If R is an integral domain, then so is $\mathbb{M}_2(R)$.

(i) The set of integrable functions from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ is a commutative ring w.r.t. pointwise addition and composition of functions.

(j) If $(R, +, \cdot)$ is a ring, then $(R, +)$ and $(R, \cdot)$ are semigroups.

SECTION B (30 Marks)

2. (a) Construct the Cayley table for the set $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ w.r.t. the composition of maps, where the elements of F are functions from $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ to $\mathbb{R}$, defined as below :

$$f_1(x) = \frac{x-1}{x}, \quad f_2(x) = x,$$

$$f_3(x) = \frac{1}{1-x} \quad \forall \, x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

Hence, check whether $(F, \cdot)$ is a group or not. *8*

(b) For $n \in \mathbb{N}$, is $\mathbb{Z}_n$ a subring of $\mathbb{Z}$? Give reasons for your answer. *2*

3. (a) Let I be an ideal of a commutative ring R. Prove that

$\sqrt{I} = \{x \in R \mid x^n \in I \text{ for some } n \in \mathbb{N}\}$ is an ideal of R.

Further, show that if R is a ring with unity and $\sqrt{I} = R$, then $I = R$. *5*

(b) Define a relation '$\sim$' on $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ by "$A \sim B$ if and only if $\det(A) = k \det(B)$ for some $k \in \mathbb{R}^*$." Check whether or not '$\sim$' is an equivalence relation. If it is, find the equivalence class of

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

If '$\sim$' is not an equivalence relation, define another relation on $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ which is an equivalence relation. *5*

4. (a) Let G be a group and let H be a normal subgroup of G. Show that if G/H is cyclic, then G need not be abelian. *3*

(b) Let

$$\phi : S_n \to \mathbb{Z}_2 : \phi(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{if } \sigma \text{ is even} \\ 1, & \text{if } \sigma \text{ is odd} \end{cases}$$

where $n \geq 3$.

Show that ϕ is a group homomorphism. Also find a non-trivial element of $\ker \phi$. *4*

(c) Check whether or not

$12 - 3x^2 - 9x^4 + 25x^5$ is irreducible in $\mathbb{Q}[x]$. *3*

SECTION C (50 Marks)

*Answer any **five** questions :*

5. (a) Let G be a group and $g \in G$. Use the Fundamental Theorem of Homomorphism to prove that $\mathbb{Z}/\langle 12 \rangle$ is isomorphic to $\langle g \rangle$ if and only if g is of order 12. *7*

(b) Is every prime ideal in a finite communicative ring with unity a maximal ideal ? Give reasons for your answer. *3*

6. (a) Let D be an integral domain, and let K and L both be fields of fractions of D. Then prove that K = L. *3*

(b) Consider the ring $R = \mathbb{Q}[x]$, and its ideal $I = \langle x^2 - x \rangle$. Find an idempotent in R/I other than $\overline{0}$ or $\overline{1}$. *3*

(c) Let G be a group and $\phi \in \text{Aut } G$. Let $H = \{g \in G \mid \phi(g) = g\}$.

Check whether or not H is a subgroup of G. If it is, then must H be normal in G ? If H is not a subgroup of G, give a proper normal subgroup of Aut $\mathbb{Z}$. *4*

7. (a) Find all possible group homomorphisms from $\mathbb{Z}_8$ to $\mathbb{Z}_{12}$. *6*

(b) Find all the proper ideals of $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$. Further, which of these are maximal ideals and why ? *4*

8. (a) Let F be a field, $F^* = F \setminus \{0\}$ and $F' = F \setminus \{1\}$. Define $\circledast$ on F by $a \circledast b = a + b - ab$. Show that $(F', \circledast)$ is a group, and that this group is isomorphic to $(F^*, \cdot)$ *7*

(b) Give an example, with justification, of a ring R which is not an integral domain and in which every ideal is a principal ideal. *3*

9. (a) Let $R = \mathbb{Z}[i]$ and $I = nR$, where $n \in \mathbb{Z}^*$. Show that $a + ib \in I$ if and only if $n | a$ and $n | b$. Further, show that R/I is a finite ring. *6*

(b) Find $Z(D_{12})$. Also find two distinct right cosets of $Z(D_{12})$ in D_{12}. *4*

10 (a) Let G be an infinite group such that for any non-trivial subgroup N of G, $|G : N| < \infty$. Prove that if $H \leq G$, then $H = \{e\}$ or H is infinite.

Further, prove that if x is a non-trivial element of G, then O(x) is infinite. *5*

(b) Use the Euclidean algorithm to find the g.c.d. of $x^4 + x + 1$ and $x^2 + 1$ in $\mathbb{Q}[x]$. *3*

(c) Give an example, with justification, of an element of S_7 with order 12. *2*

विज्ञान स्नातक (सामान्य)

(बी.एस.सी.जी. / बी.ए.जी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2022

बी.एम.टी.सी.-134 : बीजगणित

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *इस प्रश्न-पत्र में तीन भाग हैं — क, ख और ग । भाग क और भाग ख के सभी प्रश्न **अनिवार्य** हैं । भाग ग में छः प्रश्नों में से कोई **पाँच** प्रश्न कीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

भाग क (20 अंक)

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन *सत्य* हैं अथवा कौन-से *असत्य* ? अपने उत्तर का कारण दीजिए । *10×2=20*

(क) $\mathbb{R}$ का एक परिमित कोटि वाला अतुच्छ उपसमूह है ।

(ख) $\mathbb{Z}$ के प्रत्येक अरिक्त उपसमुच्चय में न्यूनतम अवयव होता है ।

(ग) समूहों के रूप में, $\mathbb{Z}_{mn} \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, जहाँ $m, n \in \mathbb{N}$.

(घ) यदि G एक चक्रीय समूह है, तो यह अपने प्रत्येक उचित अतुच्छ उपसमूहों के तुल्याकारी है ।

(ङ) वलय (R, +, ·) की प्रत्येक गुणजावली (R, +) का प्रसामान्य उपसमूह है ।

(च) यदि S एक क्रमविनिमेय वलय R का एक उपवलय है, तो S, R की एक गुणजावली होगी ही ।

(छ) यदि R एक क्षेत्र है और M, R की एक उच्चिष्ठ गुणजावली है, तो $(R/M) \simeq R$.

(ज) यदि R एक पूर्णांकीय प्रांत है, तो $\mathbb{M}_2(R)$ भी एक पूर्णांकीय प्रांत है ।

(झ) $\mathbb{R}$ से $\mathbb{R}$ तक समाकलनीय फलनों का समुच्चय, बिंदुश: योगफल और फलनों के संयोजन के सापेक्ष, एक क्रमविनिमेय वलय है ।

(ञ) यदि (R, +, ·) एक वलय है, तो (R, +) और (R, ·) सामिसमूह हैं ।

भाग ख (30 अंक)

2. (क) फलनों (प्रतिचित्रण) के संयोजन के सापेक्ष, समुच्चय $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ के लिए केली सारणी बनाइए, जहाँ F के अवयव $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ से $\mathbb{R}$ पर निम्न प्रकार परिभाषित फलन हैं :

$$f_1(x) = \frac{x-1}{x}, \ f_2(x) = x,$$

$$f_3(x) = \frac{1}{1-x} \ \forall \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

इस प्रकार, जाँच कीजिए कि $(F, \cdot)$ समूह है या नहीं । *8*

(ख) $n \in \mathbb{N}$ के लिए, क्या $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}$ का उपवलय है ? अपने उत्तर के कारण दीजिए । *2*

3. (क) मान लीजिए I एक क्रमविनिमेय वलय R की एक गुणजावली है । सिद्ध कीजिए कि

$\sqrt{I} = \{x \in R \mid$ किसी $n \in \mathbb{N}$ के लिए $x^n \in I\}$,

R की एक गुणजावली है ।

आगे, यह भी दिखाइए कि यदि R एक तत्समकी वलय है और $\sqrt{I} = R$, तो $I = R$. *5*

(ख) "$A \sim B$ यदि और केवल यदि किसी $k \in \mathbb{R}^*$ के लिए $\det(A) = k \det(B)$" द्वारा $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ पर संबंध '$\sim$' परिभाषित कीजिए । जाँच कीजिए कि '$\sim$' एक तुल्यता संबंध है या नहीं । यदि है, तो

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

का तुल्यता वर्ग ज्ञात कीजिए । यदि '$\sim$' तुल्यता संबंध नहीं है, तो $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ पर एक अन्य संबंध परिभाषित कीजिए जो एक तुल्यता संबंध हो । *5*

4. (क) मान लीजिए G एक समूह है और H, G का एक प्रसामान्य उपसमूह है । दिखाइए कि यदि G/H चक्रीय है, तो G का आबेली होना आवश्यक नहीं है । *3*

(ख) मान लीजिए

$$\phi : S_n \to \mathbb{Z}_2 : \phi(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{यदि } \sigma \text{ सम है} \\ 1, & \text{यदि } \sigma \text{ विषम है,} \end{cases}$$

जहाँ $n \geq 3$ है ।

दिखाइए कि ϕ एक समूह समाकारिता है । साथ ही, $\ker \phi$ का एक अतुच्छ अवयव ज्ञात कीजिए । *4*

(ग) जाँच कीजिए कि $12 - 3x^2 - 9x^4 + 25x^5$, $\mathbb{Q}[x]$ में अखंडनीय है या नहीं । *3*

भाग ग (50 अंक)

*किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।*

5. (क) मान लीजिए G एक समूह है और $g \in G$. समाकारिता के मूलभूत प्रमेय का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि $\mathbb{Z}/< 12 >$, $< g >$ के तुल्याकारी है, यदि और केवल यदि g की कोटि 12 है । *7*

(ख) क्या किसी परिमित तत्समकी क्रमविनिमेय वलय की प्रत्येक अभाज्य गुणजावली एक उच्चिष्ठ गुणजावली होती है ? अपने उत्तर के कारण दीजिए । *3*

6. (क) मान लीजिए D एक पूर्णांकीय प्रांत है, और मान लीजिए K और L दोनों D के विभाग क्षेत्र हैं । तब सिद्ध कीजिए कि $K = L$. *3*

(ख) वलय $R = \mathbb{Q}[x]$ और इसकी गुणजावली $I = < x^2 - x >$ पर विचार कीजिए । R/I में $\overline{0}$ या $\overline{1}$ से अलग एक वर्गसम अवयव ज्ञात कीजिए । *3*

(ग) मान लीजिए G एक समूह है और $\phi \in \text{Aut}\, G$. मान लीजिए $H = \{g \in G \mid \phi(g) = g\}$.

जाँच कीजिए कि H, G का उपसमूह है या नहीं । यदि है, तो क्या H, G में प्रसामान्य होगा ही ? यदि H, G का उपसमूह नहीं है, तो Aut $\mathbb{Z}$ का एक उचित प्रसामान्य उपसमूह दीजिए । *4*

7. (क) $\mathbb{Z}_8$ से $\mathbb{Z}_{12}$ तक सभी संभव समूह समाकारिताएँ ज्ञात कीजिए । *6*

(ख) $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ की सभी उचित गुणजावलियाँ ज्ञात कीजिए । आगे, इनमें से कौन-सी उच्चिष्ठ गुणजावलियाँ हैं और क्यों ? *4*

8. (क) मान लीजिए F एक क्षेत्र है, $F^* = F \setminus \{0\}$ और $F' = F \setminus \{1\}$. $a \circledast b = a + b - ab$ द्वारा F पर संक्रिया $\circledast$ परिभाषित कीजिए । दिखाइए कि $(F', \circledast)$ एक समूह है, और यह समूह $(F^*, \cdot)$ के तुल्याकारी है । 7

(ख) पुष्टि सहित, एक ऐसे वलय R का उदाहरण दीजिए जो एक पूर्णांकीय प्रांत न हो और जिसकी प्रत्येक गुणजावली मुख्य गुणजावली हो । 3

9. (क) मान लीजिए $R = \mathbb{Z}[i]$ और $I = nR$ है, जहाँ $n \in \mathbb{Z}^*$. दिखाइए कि $a + ib \in I$ यदि और केवल यदि $n|a$ और $n|b$. आगे, दिखाइए कि R/I एक परिमित वलय है । 6

(ख) $Z(D_{12})$ ज्ञात कीजिए । साथ ही, D_{12} में $Z(D_{12})$ के दो भिन्न-भिन्न दक्षिण सहसमुच्चय ज्ञात कीजिए । 4

10. (क) मान लीजिए G एक ऐसा अपरिमित समूह है कि G के किसी भी अतुच्छ उपसमूह N के लिए $|G : N| < \infty$. सिद्ध कीजिए कि यदि $H \leq G$, तो $H = \{e\}$ या H अपरिमित है ।
आगे, सिद्ध कीजिए कि यदि x, G का एक अतुच्छ अवयव है, तो O(x) अपरिमित है । 5

(ख) यूक्लिडीय ऐल्गोरिद्म का प्रयोग करके $\mathbb{Q}[x]$ में $x^4 + x + 1$ और $x^2 + 1$ का g.c.d. ज्ञात कीजिए । 3

(ग) S_7 के एक कोटि 12 वाले अवयव का, पुष्टि सहित, उदाहरण दीजिए । 2