No. of Printed Pages : 12

BMTC-133

BACHELOR OF SCIENCE (GENERAL) (BSCG/BAG)

Term-End Examination

June, 2022

BMTC-133 : REAL ANALYSIS

Time : 3 hours *Maximum Marks : 100*

Note : *The question paper has three sections – A, B and C. All questions in Section A and Section B are* ***compulsory****. In Section C, do any* ***five*** *questions out of seven questions. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

SECTION A

1. State whether the following statements are *True* or *False*. Give a short proof or a counter-example in support of your answer. *10×2=20*

(i) There is no bijection from **N** to **Q** $\cap$ [0, 1].

(ii) Every finite set has empty interior.

(iii) Every real valued function f has a point x in its domain such that f(x) = x.

(iv) If a sequence is bounded, then it has at least two convergent subsequences.

(v) The series $\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \ldots$ is a convergent series.

(vi) The function f defined on **R** by $f(x) = |x + 15|$ has a local minimum at $x = -15$.

(vii) For $\varepsilon = 1$, there does not exist any $\delta > 0$ such that

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x+2}{x+1} - 2 \right| < \delta.$$

(viii) The function $f(x) = [x]$ is integrable on $[0, 4]$.

(ix) For any $x \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x^2 + nx}{n} = x^2$.

(x) The sequence $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$, where

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots. + \frac{1}{n},$$ is convergent.

SECTION B

2. (a) Find the supremum of the set

$$\left\{ \frac{n}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\}.$$ *3*

(b) Check whether the sequence $\left(\sqrt{n^2} - \sqrt{n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ is monotone or not. *2*

3. Find the n^{th} partial sum of the following series, and hence check whether they are convergent or not. *5*

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

4. Let f be a differentiable function whose derivative never vanishes on [a, b]. Show that f is either strictly decreasing or strictly increasing. *5*

5. Show that the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^3 x)}{n^3}$ is uniformly convergent on $[0, \infty[$. *5*

6. Let f and g be two real-valued functions defined on [a, b] such that f is Riemann integrable and g is differentiable with $g'(x) = f(x) \ \forall \ x \in [a, b]$. Then show that $\int_a^b f(x)\, dx = g(b) - g(a)$. *5*

7. (a) Using the definition show that the sequence $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ is Cauchy. *3*

(b) Check whether the set of integers is countable or not. *2*

SECTION C

8. (a) Show that if f is a real-valued continuous function defined on a closed interval $[\alpha, \beta]$, then f is Riemann integrable over $[\alpha, \beta]$. *6*

(b) Let f be a function defined by $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$, $x \in \mathbf{R}$. Using the $\varepsilon - \delta$ definition, show that $f(x) \to \frac{1}{7}$ whenever $x \to 2$. *4*

9. (a) Let $f : [0, 2] \to \mathbf{R}$ be defined by

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 < x \le 2 \end{cases}.$$

Show that there is no real-valued function defined on [0, 2] whose derivative is f. *5*

(b) Check whether the sequence $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-5}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ is convergent or not. *5*

10. (a) Find the sequence of partial sums of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+1)}$, where $x \in [0, \infty[$. Does the sequence converge pointwise ? Does it converge uniformly ? Justify your answers. *5*

(b) Test the absolute and conditional convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+5)}$. *5*

11. (a) Prove or disprove that

$$3^n - 2^n > \left(\frac{3}{2}\right)^n \ \forall \ n \geq 2.$$ 5

(b) Prove that $x - \frac{x^2}{2} < ln \ (1 + x), \ \forall \ x > 0.$ 5

12. (a) Show that the function $f(x) = x^3$ is uniformly continuous on **R**. 5

(b) Check whether the function f defined by $f(x) = \frac{3x - 4}{x^2 - x}, \ x \notin \{0, 1\}$, has a local extrema. 5

13. (a) For any two real numbers x and y show that $|x - y| \geq ||x| - |y||$. 4

(b) Show that every convergent sequence is bounded. Is the converse true ? Justify your answer. 6

14. (a) Find the primitive of $\tan^{-1} x$ and evaluate the integral $\int_0^1 \tan^{-1} x$. 5

(b) State and prove Bolzano-Weierstrass Theorem. 5

विज्ञान स्नातक (सामान्य)

(बी.एस.सी.जी. / बी.ए.जी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2022

बी.एम.टी.सी.-133 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *इस प्रश्न-पत्र में तीन भाग हैं — क, ख और ग । भाग क और भाग ख के सभी प्रश्न **अनिवार्य** हैं । भाग ग में सात प्रश्नों में से कोई **पाँच** प्रश्न कीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

भाग क

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य* । अपने उत्तर के पक्ष में लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए । *10×2=20*

(i) $\mathbf{N}$ से $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$ पर कोई एकैकी-आच्छादन नहीं है ।

(ii) प्रत्येक परिमित समुच्चय का अभ्यंतर रिक्त होता है ।

(iii) प्रत्येक वास्तविक मान फलन f के प्रांत में एक बिंदु x ऐसा होता है कि $f(x) = x$ हो ।

(iv) यदि एक अनुक्रम परिबद्ध है, तो इसके कम-से-कम दो अभिसारी उपअनुक्रम होते हैं ।

(v) श्रेणी $\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \ldots$ एक अभिसारी श्रेणी है ।

(vi) $f(x) = |x + 15|$ द्वारा $\mathbf{R}$ पर परिभाषित फलन f का $x = -15$ पर स्थानीय निम्निष्ठ है ।

(vii) $\varepsilon = 1$ के लिए ऐसा कोई भी $\delta > 0$ का अस्तित्व नहीं है जिसके लिए

$0 < |x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x+2}{x+1} - 2 \right| < \delta$ होता हो ।

(viii) फलन $f(x) = [x]$, $[0, 4]$ पर समाकलनीय है ।

(ix) किसी भी $x \in \mathbf{R}$ के लिए, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x^2 + nx}{n} = x^2$ है ।

(x) अनुक्रम $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$, जहाँ

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots. + \frac{1}{n}$, अभिसारी है ।

भाग ख

2. (क) समुच्चय $\left\{\frac{n}{n+1} \middle| n \in \mathbf{N}\right\}$ का न्यूनतम उपरि परिबंध ज्ञात कीजिए । *3*

(ख) जाँच कीजिए कि अनुक्रम $\left(\sqrt{n^2} - \sqrt{n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ एकदिष्ट है या नहीं । *2*

3. निम्नलिखित श्रेणियों के nवें आंशिक योगफल ज्ञात कीजिए, और इस प्रकार जाँच कीजिए कि ये अभिसारी हैं या नहीं । *5*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

4. मान लीजिए f एक अवकलनीय फलन है जिसका अवकलज [a, b] पर कहीं भी शून्य नहीं है । दिखाइए कि f या तो निरंतर ह्रासमान है या निरंतर वर्धमान है । *5*

5. दिखाइए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^3 x)}{n^3}$, [0, ∞[पर एकसमानतः अभिसारी है । *5*

6. मान लीजिए f और g, [a, b] पर परिभाषित दो वास्तविक-मान फलन इस प्रकार हैं कि f रीमान समाकलनीय है और g अवकलनीय है और सभी $x \in [a, b]$ के लिए $g'(x) = f(x)$ है । तब दिखाइए कि $\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$. *5*

7. (क) परिभाषा का प्रयोग करके दिखाइए कि अनुक्रम $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ कॉशी है । *3*

(ख) जाँच कीजिए कि पूर्णांकों का समुच्चय गणनीय है या नहीं । *2*

भाग ग

8. (क) दिखाइए कि यदि f एक संवृत अंतराल $[\alpha, \beta]$ पर परिभाषित एक संतत वास्तविक-मान फलन है, तो f, $[\alpha, \beta]$ पर रीमान समाकलनीय है । *6*

(ख) मान लीजिए f एक फलन है जो $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+3}$, $x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित है । $\varepsilon - \delta$ परिभाषा का प्रयोग करके, दिखाइए कि $f(x) \to \dfrac{1}{7}$ जब भी $x \to 2$ है । *4*

9. (क) मान लीजिए $f : [0, 2] \to \mathbf{R}$ निम्न प्रकार से परिभाषित है :

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

दिखाइए कि [0, 2] पर परिभाषित ऐसा कोई भी वास्तविक-मान फलन नहीं है जिसका अवकलज f है । *5*

(ख) जाँच कीजिए कि अनुक्रम $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-5}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ अभिसारी है या नहीं । *5*

10. (क) श्रेणी $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+1)}$ के आंशिक योगफलों का अनुक्रम ज्ञात कीजिए, जहाँ $x \in [0, \infty[$ है । क्या यह अनुक्रम बिंदुशः अभिसरण करता है ? क्या यह एकसमानतः अभिसरण करता है ? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए । *5*

(ख) श्रेणी $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+5)}$ के निरपेक्ष अभिसरण व सप्रतिबंध अभिसरण की जाँच कीजिए । *5*

11. (क) सिद्ध या असिद्ध कीजिए कि : 5

$$3^n - 2^n > \left(\frac{3}{2}\right)^n \ \forall\ n \geq 2$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि सभी $x > 0$ के लिए,

$x - \frac{x^2}{2} < ln\,(1 + x)$ है । 5

12. (क) दिखाइए कि फलन $f(x) = x^3$, **R** पर एकसमानत: संतत है । 5

(ख) जाँच कीजिए कि $f(x) = \frac{3x - 4}{x^2 - x}$, $x \notin \{0, 1\}$, द्वारा परिभाषित फलन f के स्थानीय चरम मान हैं या नहीं । 5

13. (क) कोई भी दो वास्तविक संख्याओं x और y के लिए, दिखाइए कि $|x - y| \geq \big|\,|x| - |y|\,\big|$ होता है । 4

(ख) दिखाइए कि प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होता है । क्या इसका विलोम भी सत्य है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 6

14. (क) $\tan^{-1} x$ का पूर्वग ज्ञात कीजिए और समाकल $\int_0^1 \tan^{-1} x$ का मान ज्ञात कीजिए । 5

(ख) बोल्जानो-वायर्स्ट्रास प्रमेय का कथन दीजिए और इसे सिद्ध कीजिए । 5