No. of Printed Pages : 8

PHE-14

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

June, 2021

PHYSICS

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS – III

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt **all** questions. The marks for each question are indicated against it. Symbols have their usual meanings.*

---

1. Attempt any ***five*** parts : *5×2=10*

(a) If a real matrix is both symmetric and orthogonal, show that its eigenvalues can only be +1 or –1.

(b) Define contravariant and covariant tensors of rank 2.

(c) Show that the set of integers is a group under addition.

(d) Show that $f(z) = e^z$ is an analytic function.

(e) Determine the Fourier transform of the function

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

(f) Obtain the Laplace transform of $5 + 2e^{3t}$.

(g) Using the generating function

$$g(t, x) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n, \ |t| < 1,$$

prove that Legendre polynomials satisfy the relation $P_n(-1) = (-1)^n$.

(h) Using the Rodrigues' formula for Laguerre polynomials given by

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}),$$

determine $L_2(x)$.

2. Attempt any ***one*** part :

(a) (i) Verify the Cayley-Hamilton theorem for the matrix

$$M = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}.$$ *5*

(ii) If A is such that $A^3 = A$, show that

$$\cos(\pi A) = I - 2A^2.$$ *5*

(b) Diagonalize the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$ *10*

3. Attempt any ***one*** part :

(a) Using the method of residues, show that : *10*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

(b) Evaluate the following integral over the closed contour C formed by the lines $x = \pm 2\pi$, $y = \pm 2\pi$: *10*

$$\oint_C \frac{\sin z}{(z-\pi)^2}\, dz$$

4. Attempt any ***one*** part :

(a) Use the method of Laplace transforms to solve the initial value problem

$$y'' + 2y' - 8y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 8.$$ *10*

(b) The general solution of Laplace's equation for the steady state temperature distribution in a metal plate is

$$T(x, y) = \int_0^\infty B(k) e^{-ky} \sin kx\, dk$$

Using the method of Fourier transforms, obtain the particular solution for T(x, y) given that the initial temperature distribution is

$$T(x, 0) = \begin{cases} 50\,(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$ *10*

5. Attempt any ***one*** part :

(a) Using the recurrence relation

$(n + 1)\, P_{n+1}(x) = (2n + 1)\, x\, P_n(x) - n\, P_{n-1}(x)$,

evaluate the integrals : *10*

(i) $\int_{-1}^{+1} x\, P_{n-1}(x)\, P_n(x)\, dx$, and

(ii) $\int_{-1}^{+1} x\, P_n(x)\, dx$

(b) The Bessel function of the first kind of order n is given by

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

Show that

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,.$$ *10*

विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2021

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ – III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : ***सभी*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।*

1. कोई ***पाँच*** भाग कीजिए : *5×2=10*

(क) यदि एक वास्तविक आव्यूह सममित और लांबिक दोनों हो, तो सिद्ध कीजिए कि इसके आइगेनमान केवल +1 या –1 हो सकते हैं ।

(ख) कोटि 2 वाले प्रतिपरिवर्ती और सहपरिवर्ती टेन्सरों को परिभाषित कीजिए ।

(ग) सिद्ध कीजिए कि योग के अधीन सभी पूर्णांकों का समुच्चय एक समूह होता है ।

(घ) सिद्ध कीजिए कि $f(z) = e^z$ एक विश्लेषिक फलन है ।

(ङ) निम्नलिखित फलन का फूरिये रूपांतर ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

(च) $5 + 2e^{3t}$ का लाप्लास रूपांतर प्राप्त कीजिए ।

(छ) निम्नलिखित जनक फलन

$$g(t, x) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, |t| < 1$$

का उपयोग कर, सिद्ध कीजिए कि लेजान्ड्रे बहुपद संबंध $P_n(-1) = (-1)^n$ को संतुष्ट करते हैं ।

(ज) लागेर बहुपदों के रोड्रिगेज़ सूत्र

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

का उपयोग कर, $L_2(x)$ ज्ञात कीजिए ।

2. कोई ***एक*** भाग कीजिए :

(क) (i) आव्यूह

$$M = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$$

के लिए कैले-हैमिल्टन-प्रमेय को सत्यापित कीजिए । *5*

(ii) यदि A ऐसा हो कि $A^3 = A$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\cos(\pi A) = I - 2A^2$ है । *5*

(ख) आव्यूह

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

का विकर्णन कीजिए । *10*

3. कोई ***एक*** भाग कीजिए :

(क) अवशिष्ट विधि का उपयोग कर, सिद्ध कीजिए कि : *10*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

(ख) रेखाओं $x = \pm 2\pi$, $y = \pm 2\pi$ से बने संवृत कंटूर C पर निम्नलिखित समाकल का मान ज्ञात कीजिए : *10*

$$\oint_C \frac{\sin z}{(z-\pi)^2} dz$$

4. कोई ***एक*** भाग कीजिए :

(क) लाप्लास रूपांतर विधि का उपयोग कर आदि मान समस्या

$$y'' + 2y' - 8y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 8$$

को हल कीजिए । *10*

(ख) धातु की प्लेट में स्थायी अवस्था तापमान बंटन के लिए लाप्लास समीकरण का व्यापक हल निम्नलिखित है :

$$T(x, y) = \int_0^\infty B(k) e^{-ky} \sin kx \, dk$$

फूरिये रूपांतर विधि का उपयोग कर, $T(x, y)$ के लिए विशेष हल प्राप्त कीजिए, जहाँ प्रारंभिक तापमान बंटन निम्नलिखित द्वारा दिया गया है :

$$T(x, 0) = \begin{cases} 50\,(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$ *10*

5. कोई ***एक*** भाग कीजिए :

(क) निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध

$$(n + 1)\, P_{n+1}(x) = (2n + 1)\, x\, P_n(x) - n\, P_{n-1}(x)$$

का उपयोग कर, निम्नलिखित समाकलों के मान ज्ञात कीजिए : *10*

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{+1} x\, P_{n-1}(x)\, P_n(x)\, dx$, और

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^{+1} x\, P_n(x)\, dx$

(ख) कोटि n वाले प्रथम प्रकार का बेसल फलन निम्नलिखित द्वारा दिया गया है :

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\, \Gamma(n + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

सिद्ध कीजिए कि

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,.$$ *10*