

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)****Term-End Examination****June, 2021****ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-07 : ADVANCED CALCULUS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50**(Weightage : 70%)*

Note : *Question no. 1 is **compulsory**. Attempt any **four** questions out of the remaining questions 2 to 7. Use of calculators is **not** allowed.*

1. State whether the following statements are true or false. Justify your answers. 10

(a) The function $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = \sinh(e^\pi)$ is continuous at $(0, 0)$.

(b) $S = \{4 + \frac{1}{x} \mid 0 < x < 1\}$ is bounded below.

(c) If $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ and f_x and f_y exist at $(a, b) \in \mathbf{R}$, then f is continuous at (a, b) .

(d) The function f , defined by

$$f(x, y) = \frac{x^3 + 3x^2y - 4y^3}{xy + 2} \text{ is homogeneous}$$

on its domain.

(e) The function defined by

$f(x, y) = (2x - 3y, 3x + 2y)$ is locally invertible
on its domain.

2. (a) Locate and classify the stationary points of
the following : 6

(i) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$

(ii) $f(x, y) = xy$

(b) Find the domain of functions fg and f/g ,
where $f(x, y) = \sin x + \cos y$, $g(x, y) = \frac{\sin x}{y}$,

$y \neq 0$. 4

3. (a) Find all the Taylor polynomials of
 $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ at $(2, 1)$. 4

(b) Evaluate the integrals

$$\iiint_W \sin(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} dx dy dz, \text{ where } W$$

is the region bounded by the sphere
 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. 4

(c) Describe the level curves of

$f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$. 2

4. (a) If $f(x, y, z) = (\sin x, \cos y, \sin z)$,

$$g(x, y, z) = (x + 2, y^2, z^2 + 1),$$

and $F = f \circ g$, verify that

$$J_F(1, 1, 1) = J_f(3, 1, 2) \circ J_g(1, 1, 1). \quad 5$$

(b) (i) Find $\frac{du}{dx}$, if $u(x, y) = x^3 + 3xy + xy^2$

$$\text{and } y = (2x + 1).$$

(ii) Find $\frac{du}{dt}$, if $u(x, y) = x^2 + xy + 3y$,

$$x = t + 2, \quad y = 1 + t^2. \quad 5$$

5. (a) Identify the indeterminate form and evaluate : 6

(i)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{1/x}$$

(ii)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \right)$$

(b) Evaluate the integral $\iint_D (x^4 + y^2) dx dy$,

where D is the triangle bounded by $x = 0$,
 $y = x$, $y = 2$. 4

6. (a) Find the centre of gravity of a thin plate of density S , bounded by $y = x^2$ and $y = x$ in the first quadrant. 5

- (b) Check whether the following limit exists or not : 5

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2}$$

7. (a) If f is a real-valued function defined in a neighbourhood N of a point $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, and if f is differentiable at (a, b) , show that f is continuous at (a, b) . 3

- (b) Evaluate the following limits : 3

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin 2x}{5x - \cos x}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + e^{-5x})$

- (c) If possible, find a function f such that

$$F(x^2 + y, y^2 + x) = \nabla f. \quad 4$$

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2021

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-07 : उच्च कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। शेष 2 से 7 प्रश्नों में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरो के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए।

10

(क) फलन $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = \sinh(e^\pi)$, $(0, 0)$ पर संतत है।

(ख) $S = \{4 + \frac{1}{x} \mid 0 < x < 1\}$ नीचे से परिबद्ध है।

(ग) यदि $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ और f_x और f_y का $(a, b) \in \mathbf{R}$ पर अस्तित्व है, तब f , (a, b) पर संतत है।

(घ) $f(x, y) = \frac{x^3 + 3x^2y - 4y^3}{xy + 2}$ द्वारा परिभाषित फलन

f अपने प्रांत पर समघात है ।

(ङ) $f(x, y) = (2x - 3y, 3x + 2y)$ द्वारा परिभाषित फलन अपने प्रांत पर स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय है ।

2. (क) निम्नलिखित के स्तब्ध बिंदु ज्ञात कीजिए और उनका वर्गीकरण कीजिए : 6

(i) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$

(ii) $f(x, y) = xy$

(ख) फलनों fg और f/g का प्रांत ज्ञात कीजिए, जहाँ

$f(x, y) = \sin x + \cos y$, $g(x, y) = \frac{\sin x}{y}$, $y \neq 0$. 4

3. (क) $(2, 1)$ पर $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ के सभी टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए । 4

(ख) समाकलों $\iiint_W \sin(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} dx dy dz$

का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ W , गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ द्वारा परिबद्ध प्रदेश है । 4

(ग) $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ के स्तर वक्रों का वर्णन कीजिए । 2

4. (क) यदि $f(x, y, z) = (\sin x, \cos y, \sin z)$,
 $g(x, y, z) = (x + 2, y^2, z^2 + 1)$, और $F = f \circ g$, तब
सत्यापित कीजिए कि
 $J_F(1, 1, 1) = J_f(3, 1, 2) \circ J_g(1, 1, 1)$. 5

- (ख) (i) $\frac{du}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि
 $u(x, y) = x^3 + 3xy + xy^2$ और $y = (2x + 1)$.
- (ii) $\frac{du}{dt}$ ज्ञात कीजिए, यदि $u(x, y) = x^2 + xy + 3y$,
 $x = t + 2$, $y = 1 + t^2$. 5

5. (क) निम्नलिखित के अनिर्धार्य रूप को पहचानिए और
मूल्यांकन कीजिए : 6

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{1/x}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \right)$

- (ख) समाकल $\iint_D (x^4 + y^2) dx dy$ का मूल्यांकन कीजिए,
जहाँ D , $x = 0$, $y = x$, $y = 2$ द्वारा परिबद्ध त्रिभुज
है। 4

6. (क) प्रथम चतुर्थांश में $y = x^2$ और $y = x$ द्वारा परिबद्ध,
घनत्व S वाली पतली प्लेट का गुरुत्व केंद्र ज्ञात
कीजिए। 5

(ख) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित सीमा का अस्तित्व है या नहीं :

5

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2}$$

7. (क) यदि f , बिन्दु $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ के प्रतिवेश N में परिभाषित वास्तविक-मान फलन है और यदि f , (a, b) पर अवकलनीय है, तब दिखाइए कि f , (a, b) पर संतत है ।

3

(ख) निम्नलिखित सीमाओं का मूल्यांकन कीजिए :

3

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin 2x}{5x - \cos x}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + e^{-5x})$

(ग) यदि संभव हो, तो ऐसा फलन f ज्ञात कीजिए जिसके लिए

$$F(x^2 + y, y^2 + x) = \nabla f.$$

4
