

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

MTE-04 : ELEMENTARY ALGEBRA

&

MTE-05 : ANALYTICAL GEOMETRY

Instructions :

1. *Students registered for both MTE-04 & MTE-05 courses should answer both the question papers in two separate answer books entering their enrolment number, course code and course title clearly on both the answer books.*
2. *Students who have registered for MTE-04 or MTE-05 should answer the relevant question paper after entering their enrolment number, course code and course title on the answer book.*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

एम.टी.ई.-04 : प्रारंभिक बीजगणित

एवं

एम.टी.ई.-05 : वैश्लेषिक ज्यामिति

निर्देश :

1. जो छात्र एम.टी.ई.-04 और एम.टी.ई.-05 दोनों पाठ्यक्रमों के लिए पंजीकृत हैं, दोनों प्रश्न-पत्रों के उत्तर अलग-अलग उत्तर पुस्तिकाओं में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ़-साफ़ लिखकर दें ।
2. जो छात्र एम.टी.ई.-04 या एम.टी.ई.-05 किसी एक के लिए पंजीकृत हैं, अपने उसी प्रश्न-पत्र के उत्तर उत्तर-पुस्तिका में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ़-साफ़ लिखकर दें ।

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

(B.D.P.)

Term-End Examination

June, 2021

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-04 : ELEMENTARY ALGEBRA

Time : $1\frac{1}{2}$ hours

Maximum Marks : 25

(Weightage : 70%)

Note : Question no. 5 is **compulsory**. Attempt any **three** questions from questions no. 1 to 4. Use of calculators is **not** allowed.

1. (a) For any three sets A, B and C, prove that
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. 2

(b) Can the following system of equations be solved by Cramer's Rule ? If yes, use the rule to solve it. Otherwise, use the method of substitution to solve it. 3

$$x + y + z = 4$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y = 1 + z$$

2. Solve $x^3 + 15x^2 - 33x - 847 = 0$ by Cardano's method. 5

3. (a) Show that for $n \in \mathbf{N}$, $\left(\sum_{i=1}^n i^r \right)^n > n^n (n!)^r$,

where $r > 0$ and $n!$ denotes the factorial of n . 2

(b) Check whether or not

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n+2}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}, \forall n \in \mathbf{N}. \quad 3$$

4. (a) A milk producer feeds her cows with a feed menu that comprises 40 units of protein, 60 units of calcium and 70 units of carbohydrates. She needs to find the quantities of two types of feeds she has, F_1 and F_2 . The nutrients in per unit of each of these feeds is given in the table below :

Nutrients	F_1	F_2
Protein	1	1
Calcium	3	1
Carbohydrates	1	2

Formulate the situation above as a linear system, and solve it. $2 \frac{1}{2}$

- (b) For which equations $x^2 + ax + b = 0$ will a and b be its roots ? Give reasons for your answers. $2 \frac{1}{2}$

5. Which of the following statements are *True*, and which are *False* ? Justify your answers in the form of a short proof or counter-example, where required.

- (i) For any two sets A and B, $A \times B = B \times A$.
- (ii) The sum of the moduli of the cube roots of unity is zero.
- (iii) Any polynomial equation with coefficients in \mathbf{R} has all its roots in \mathbf{R} .
- (iv) The following system of equations is consistent :

$$x + y = 5$$

$$3x + 3y = 1$$

- (v) The contrapositive of 'Every odd integer is a prime' is 'Every odd integer is a composite number'.
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2021

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-04 : प्रारंभिक बीजगणित

समय : $1\frac{1}{2}$ घण्टे

अधिकतम अंक : 25
(कुल का : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 5 अनिवार्य है । प्रश्न सं. 1 से 4 में से किन्हीं तीन प्रश्नों को हल कीजिए । कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।

1. (क) किन्हीं तीन समुच्चयों A, B और C के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \quad 2$$

- (ख) क्या निम्नलिखित समीकरण निकाय क्रैमर नियम से हल हो सकता है ? यदि हाँ, तो इस नियम का प्रयोग करके इस निकाय को हल कीजिए । अन्यथा, प्रतिस्थापन विधि का प्रयोग करके इसे हल कीजिए ।

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ x - y + z &= 2 \\ 2x + y &= 1 + z \end{aligned} \quad 3$$

2. कार्दानो विधि से $x^3 + 15x^2 - 33x - 847 = 0$ को हल कीजिए ।

5

3. (क) $n \in \mathbf{N}$ के लिए दिखाइए कि $\left(\sum_{i=1}^n i^r \right)^n > n^n (n!)^r$,

जहाँ $r > 0$ और $n!$, n का क्रमगुणित (factorial) है । 2

(ख) जाँच कीजिए कि $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n+2}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}$,

सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए होता है या नहीं । 3

4. (क) एक दूध उत्पादक अपनी गायों को एक चारा मेनु के अनुसार चारा देती है, जिसमें 40 इकाई प्रोटीन, 60 इकाई कैल्सियम, और 70 इकाई कार्बोहाइड्रेट है । उसके पास दो तरह के चारे F_1 और F_2 हैं, जिनकी मात्रा उसे ज्ञात करनी है । प्रत्येक चारे की प्रति इकाई पोषक तत्वों की संख्या नीचे तालिका में दी गई है :

पोषक तत्व	F_1	F_2
प्रोटीन	1	1
कैल्सियम	3	1
कार्बोहाइड्रेट	1	2

उपर्युक्त समस्या को एक रैखिक निकाय में निरूपित कीजिए, और इसे हल कीजिए ।

$$2 \frac{1}{2}$$

- (ख) किन समीकरणों $x^2 + ax + b = 0$ के मूल a और b हैं ? अपने उत्तरों के कारण दीजिए ।

$$2 \frac{1}{2}$$

5. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं, और कौन-से असत्य ? अपने उत्तरों के कारण, एक लघु उपपत्ति या प्रतिउदाहरण (जहाँ ज़रूरत है) के रूप में, दीजिए। 10

(i) किन्हीं दो समुच्चयों A और B के लिए,
 $A \times B = B \times A$.

(ii) एक के घनमूलों के मापांकों का योगफल शून्य होता है।

(iii) किसी बहुपद समीकरण जिसके गुणांक \mathbf{R} में हैं, के सभी मूल \mathbf{R} में होते हैं।

(iv) निम्नलिखित समीकरण निकाय संगत है :

$$x + y = 5$$

$$3x + 3y = 1$$

(v) 'प्रत्येक विषम पूर्णांक अभाज्य है' का प्रतिधनात्मक 'प्रत्येक विषम पूर्णांक भाज्य संख्या है'।

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

June, 2021

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-05 : ANALYTICAL GEOMETRY

Time : $1\frac{1}{2}$ hours

Maximum Marks : 25

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 5 is **compulsory**. Answer any **three** questions from questions no. 1 to 4. Use of calculators is **not** allowed.*

1. (a) Find the equation of a hyperbola whose transverse and conjugate axes are of length 4 and 6 and lie along the lines $x + 3 = 0$ and $y - 1 = 0$, respectively. 3
- (b) Consider the hyperbolic paraboloid $x^2 - 5y^2 = z$. What is its section by the planes $x = 0$ and $y = 2$? Further, identify the geometric object this section represents. 2

2. (a) Find the equation of the ellipse whose foci are $(-4, 0)$ and $(4, 0)$, and the length of whose major axis is thrice the length of its minor axis. 2

- (b) Find the value of the real number a so that the spheres

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 8 \text{ and}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x = a$$

are orthogonal. 3

3. (a) Prove that if $\alpha x + \beta y + 1 = 0$ is tangent to the circle $x^2 + y^2 + 2ux + 2vy + w = 0$, then $(\alpha v + \beta u - 1)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(u^2 + v^2 - w)$. 3

- (b) Find the cone generated by the normals to the tangent planes at the vertex of the cone 2

$$3x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 0.$$

4. (a) Find the transformation of the equation $12x^2 - 2y^2 + z^2 = 2xy$ if the origin is kept fixed and the axes are rotated in such a way that the direction ratios of the new axes are $1, -3, 0; 3, 1, 0; 0, 0, 1$. 3

- (b) Find the equation of the right circular cylinder of radius 3, whose axis passes through the point $(-3, 2, 1)$, and has direction ratios 1, 2, 3. 2

5. Which of the following statements are *True* and which are *False* ? Justify your answer 10

- (i) If α, β, γ are direction ratios of a line, then $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.
 - (ii) $y = mx + c$ represents a line in three-dimensional space.
 - (iii) If the projection of a line segment AB on a line L is 0, then AB lies along L.
 - (iv) Any plane intersects a paraboloid in a parabola.
 - (v) If a right circular cone has three mutually perpendicular generators, then its semi-vertical angle is $\tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2021

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-05 : वैश्लेषिक ज्यामिति

समय : $1\frac{1}{2}$ घण्टे

अधिकतम अंक : 25

(कुल का : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 5 करना अनिवार्य है । प्रश्न सं. 1 से 4 में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरो के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।

1. (क) उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके अनुप्रस्थ अक्ष और संयुग्मी अक्ष की लंबाइयाँ क्रमशः 4 और 6 हैं और जो क्रमशः रेखाओं $x + 3 = 0$ और $y - 1 = 0$ पर स्थित हैं । 3
- (ख) अतिपरवलयिक परवलयज $x^2 - 5y^2 = z$ पर विचार कीजिए । इसका समतलों $x = 0$ और $y = 2$ द्वारा परिच्छेद क्या है ? आगे, यह भी बताइए कि यह परिच्छेद किस ज्यामितीय आकृति को निरूपित करता है । 2

2. (क) उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियाँ $(-4, 0)$ और $(4, 0)$ हैं, और जिसके दीर्घ अक्ष की लंबाई लघु अक्ष की लंबाई की तीन गुना है । 2
- (ख) वास्तविक संख्या a का वह मान ज्ञात कीजिए जो गोलों $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 8$ और $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = a$ को लंबकोणीय बनाता है । 3
3. (क) सिद्ध कीजिए कि यदि $\alpha x + \beta y + 1 = 0$ वृत्त $x^2 + y^2 + 2ux + 2vy + w = 0$ की स्पर्श-रेखा है, तो $(\alpha v + \beta u - 1)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(u^2 + v^2 - w)$. 3
- (ख) शंकु $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 0$ के शीर्ष पर स्पर्श तलों के अभिलंबों द्वारा जनित शंकु ज्ञात कीजिए । 2
4. (क) समीकरण $12x^2 - 2y^2 + z^2 = 2xy$ का रूपान्तरण ज्ञात कीजिए, यदि मूल-बिंदु को स्थिर रखा गया हो और अक्षों को इस प्रकार घुमाया गया हो कि नए अक्षों के दिक्-अनुपात $1, -3, 0; 3, 1, 0; 0, 0, 1$ हों । 3
- (ख) त्रिज्या 3 वाले उस लंब-वृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अक्ष बिंदु $(-3, 2, 1)$ से गुज़रता है, और दिक्-अनुपात $1, 2, 3$ रखता है । 2

5. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं अथवा कौन-से असत्य ? अपने उत्तरों के कारण दीजिए ।

10

- (i) यदि α, β, γ किसी रेखा के दिक्-अनुपात हैं, तो $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.
- (ii) $y = mx + c$ त्रिविम समष्टि में एक रेखा को निरूपित करता है ।
- (iii) यदि किसी रेखाखण्ड AB का रेखा L पर प्रक्षेप 0 है, तो AB, L में है ।
- (iv) कोई भी समतल किसी परवलयज को एक परवलय में प्रतिच्छेद करता है ।
- (v) यदि किसी लंब-वृत्तीय शंकु के तीन परस्पर लंब जनक हैं, तो इसका अर्द्धशीर्ष कोण $\tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ होगा ।
-