BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)
Term-End Examination
June, 2021

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*
(Weightage : 70%)

Note : *Answer any* ***five*** *questions. All questions carry equal marks. Use of calculators is* ***not*** *allowed. Symbols have their usual meanings.*

1. (a) Deduce the one-dimensional diffusion equation corresponding to the situation when the wind velocity is zero and the diffusion is only in the x-direction. Verify that the air concentration,

$$C(x, t) = \frac{m \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right]}{[4\pi Dt]^{1/2}}$$

satisfies the one-dimensional diffusion equation, where D is the diffusion coefficient and m is the total amount of the diffusing solute. Also, find $\int_{-\infty}^{\infty} C(x, t)\, dt$, and interpret the result.

[You may use the result $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}}\, dy = \sqrt{2\pi}$.] *6*

(b) Classify the following models as deterministic or probabilistic, giving reasons for your answers : *4*

(i) Spreading of a disease in successive generations;

(ii) Describing the dynamics of a human knee joint;

(iii) Designing a ship or an aeroplane with minimum drag;

(iv) Predicting the success of a film at the box office.

2. (a) Suppose the populations x and y satisfy the following equations :

$$\frac{dx}{dt} = 60x - 4x^2 - 3xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = 42y - 2y^2 - 3xy.$$

Find all the critical points of the system. Which of these critical points represent the possibility of co-existence of two species, and why ? Determine the type and stability of these critical points. *6*

(b) When an aeroplane ascends from take-off to an altitude of 10 km, by how much does the gravitational attraction acting on it decrease ? Give reasons for your answer. [You may take the radius of the Earth to be 6400 km.] *4*

3. (a) The air pollution in many urban areas in our country is causing serious health problems like asthma, bronchitis, etc. If a statistical model is to be made correlating the level of pollution and the incidence of the disease, write any four essentials and two non-essentials concerned. *3*

(b) A particle moves on a plane with constant linear velocity ωa, and its angular velocity about the pole is $\frac{\omega r}{a}$, where ω is the angular velocity when the particle moves in a circle of radius a. Show that its linear acceleration is $3\omega^2 r$. *7*

4. (a) The annual sales of a company from 2010 to 2014 are as follows :

Year	Sales (₹ in Lakhs)
2010	900
2011	1120
2012	1560
2013	920
2014	1500

(i) Using the method of least squares, find the trend values equation using 2009 as the origin.

(ii) Estimate the annual sales for the year 2015. *6*

(b) The dynamics of a tumour growth is given by the equation

$$V(t) = V_0 \exp\left[\frac{\lambda}{\alpha}(1 - \exp(-\alpha t))\right],$$

where λ and α are positive constants, V_0 is the volume of the dividing cells at the initial time t_0, and V(t) is the volume of the dividing cells at time t.

(i) Show that the tumour grows more and more slowly with the passage of time, and it ultimately approaches the limiting value $V_0\, e^{\lambda/\alpha}$.

(ii) Derive the equation $\frac{dV}{dt} = \lambda\, e^{-\alpha t}\, V$. *4*

5. (a) A particle of mass m, is falling under the influence of gravity through a medium whose resistance equals μ times the velocity. If the particle is released from rest, show that the distance fallen through time t is $g\,\frac{m^2}{\mu^2}\left[e^{-\mu t/m} - 1 + \frac{\mu t}{m}\right]$. *7*

(b) Write the dimensions of the following : *3*

(i) ω, the angular velocity;

(ii) $m\omega^2 r$, the angular force, where m is the mass and r is the radial distance;

(iii) Young's modulus.

6. (a) The modified logistic population model for a fish population including the effect of harvesting is given as follows :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN\left[1 - \frac{N}{K}\right] - EN,$$

where N(t) is the population of fishes at any time t; r, k and E are positive constants. Determine N(t). Also, show that for $E \leq r$, $N(t) \to K\left[1 - \frac{E}{r}\right]$, as $t \to \infty$, and for $E > r$, $N(t) \to 0$ as $t \to \infty$. *5*

(b) The demand function for a particular commodity is $y = 15\, e^{-x/3}$, $0 \leq x \leq 8$, where y is the price per unit and x is the number of units demanded. Determine the price and the quantity for which the revenue is maximum. *5*

7. (a) Suppose a viscous oil, whose flow is in the laminar regime, is to be pumped through a 10 cm diameter horizontal pipe over a distance of 15 km at a rate of 10^{-3} m^3/s. Viscosity of the oil is 0·03 poise. What is the required pressure drop to maintain such a flow ? *4*

(b) Arrivals at a telephone booth are considered to be Poisson with an average time of 10 minutes between one arrival and the next. The length of a phone call is assumed to be distributed exponentially with mean 3 minutes.

(i) What is the probability that a person arriving at the booth will have to wait ?

(ii) What is the average length of the queue that forms from time to time ?

(iii) The telephone department will install a second booth when convinced that an arrival would expect to have to wait at least three minutes for the phone. By how much should the flow of arrivals be increased in order to justify a second booth ? *6*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2021

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं । कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है । संकेतों के अर्थ सामान्य हैं ।*

1. (क) जब वायु वेग शून्य हो और विसरण केवल x-दिशा में हो, तो संगत स्थिति में एक-विमीय विसरण समीकरण निगमित कीजिए । जाँच कीजिए कि वायु सांद्रता

$$C(x, t) = \frac{m \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right]}{[4\pi Dt]^{1/2}}$$

एक-विमीय विसरण समीकरण को संतुष्ट करता है, जहाँ D विसरण गुणांक है और m विसरित विलेय की कुल मात्रा है । $\int_{-\infty}^{\infty} C(x, t)\, dt$ भी ज्ञात कीजिए और प्राप्त परिणाम की व्याख्या कीजिए ।

[आप परिणाम $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}}\, dy = \sqrt{2\pi}$] का प्रयोग कर सकते हैं ।] *6*

(ख) अपने उत्तर का कारण बताते हुए निम्नलिखित निदर्शों (प्रतिरूपों) को निर्धारणात्मक अथवा प्रायिकतात्मक में वर्गीकृत कीजिए : *4*

(i) आने वाली पीढ़ियों में बीमारी का फैलना;

(ii) मानव घुटने के जोड़ की गतिकी का वर्णन;

(iii) निम्नतम कर्षण वाले जहाज़ अथवा विमान की अभिकल्पना करना;

(iv) बॉक्स ऑफिस में फिल्म की सफलता की भविष्यवाणी करना ।

2. (क) मान लीजिए समष्टियाँ x और y निम्नलिखित समीकरणों को संतुष्ट करती हैं :

$$\frac{dx}{dt} = 60x - 4x^2 - 3xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = 42y - 2y^2 - 3xy.$$

निकाय के सभी क्रांतिक बिंदुओं को ज्ञात कीजिए । इनमें से कौन-से क्रांतिक बिंदु दो स्पीशीज़ के सह-अस्तित्व की संभावना को निरूपित करते हैं और क्यों ? उन क्रांतिक बिंदुओं के प्रकार और स्थायित्व पर चर्चा कीजिए । *6*

(ख) जब एक विमान प्रस्थान से 10 km की ऊँचाई तक चढ़ता है, तब इसके गुरुत्वाकर्षण में कितनी कमी आती है ? अपने उत्तर का कारण दीजिए । [आप पृथ्वी की त्रिज्या 6400 km ले सकते हैं ।] *4*

3. (क) हमारे देश के कई शहरी क्षेत्रों में वायु प्रदूषण के कारण गंभीर स्वास्थ्य समस्याएँ जैसे कि दमा, श्वासनली-शोथ, आदि बढ़ रही हैं । यदि प्रदूषण स्तर और बीमारियों के बीच के परस्पर संबंध के अध्ययन के लिए सांख्यिकी निदर्श बनाना है, तो इसके लिए चार अनिवार्य और दो ग़ैर-अनिवार्य तथ्य लिखिए । *3*

(ख) अचर रैखिक वेग ωa वाला एक कण समतल पर गतिमान है और ध्रुव के प्रति इसका कोणीय वेग $\frac{\omega r}{a}$ है, जहाँ ω कण का कोणीय वेग है, जब वह a त्रिज्या के वृत्त में गति करता है । दिखाइए कि इसका रैखिक त्वरण $3\omega^2 r$ है । *7*

4. (क) 2010 से 2014 तक कम्पनी की वार्षिक बिक्री इस प्रकार है :

वर्ष	बिक्री (लाखों ₹ में)
2010	900
2011	1120
2012	1560
2013	920
2014	1500

(i) 2009 को मूल-बिंदु मानकर न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा उपनति मान समीकरण ज्ञात कीजिए ।

(ii) वर्ष 2015 की वार्षिक बिक्री आकलित कीजिए । *6*

(ख) ट्यूमर वृद्धि की गतिकी निम्नलिखित समीकरण द्वारा प्राप्त है :

$$V(t) = V_0 \exp\left[\frac{\lambda}{\alpha}(1 - \exp(-\alpha t))\right],$$

जहाँ λ और α धनात्मक अचर हैं, V_0 आदि समय t_0 पर विभाजित होती कोशिकाओं का आयतन है और $V(t)$ समय t पर विभाजित होती कोशिकाओं का आयतन है ।

(i) दिखाइए कि समय गुज़रने के साथ ट्यूमर में वृद्धि धीरे होने लगती है और अंततः सीमांत आयतन $V_0\, e^{\lambda/\alpha}$ की ओर अभिसरित होती है ।

(ii) समीकरण $\frac{dV}{dt} = \lambda\, e^{-\alpha t}\, V$ व्युत्पन्न कीजिए । *4*

5. (क) द्रव्यमान m वाला एक कण गुरुत्व के अधीन एक माध्यम जिसका प्रतिरोध वेग का μ गुणा है, से गिर रहा है । यदि कण को विरामावस्था से गिराया जाए, तो दिखाइए कि समय t में तय की गई दूरी इस प्रकार है :

$$g\frac{m^2}{\mu^2}\left[e^{-\mu t/m} - 1 + \frac{\mu t}{m}\right] \qquad 7$$

(ख) निम्नलिखित की विमाएँ लिखिए : *3*

(i) ω, कोणीय वेग;

(ii) $m\omega^2 r$, कोणीय बल, जहाँ m द्रव्यमान है और r त्रिज्य दूरी;

(iii) यंग का गुणांक

6. (क) शस्य के प्रभाव को दिखाते हुए मछलियों की समष्टि के लिए परिवर्तित वृद्धिघात समष्टि निदर्श इस प्रकार है :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN\left[1 - \frac{N}{K}\right] - EN,$$

जहाँ $N(t)$ किसी भी समय t पर मछलियों की जनसंख्या है; r, k तथा E धनात्मक अचर हैं । $N(t)$ ज्ञात कीजिए । दिखाइए कि $E \leq r$ के लिए $t \to \infty$ पर $N(t) \to K\left[1 - \frac{E}{r}\right]$ और $E > r$ के लिए $t \to \infty$ पर $N(t) \to 0$. *5*

(ख) मान लीजिए कि एक विशिष्ट वस्तु का माँग फलन $y = 15\ e^{-x/3}$, $0 \leq x \leq 8$ है, जहाँ y प्रति इकाई कीमत और x इकाइयों की माँग संख्या है । वस्तु की कीमत व माँग मात्रा ज्ञात कीजिए जिससे कि आय अधिकतम हो । *5*

7. (क) मान लीजिए कि एक श्यान तेल, जिसका प्रवाह अप्रक्षुब्ध क्षेत्र में है, को $10^{-3}\ m^3/s$ की दर से 15 km की दूरी तक 10 cm व्यास वाले क्षैतिज पाइप में से पम्प करना है । तेल की श्यानता 0·03 पॉयज़ है । ऐसे प्रवाह को बनाए रखने के लिए कितने दाब पात की आवश्यकता है ? *4*

(ख) एक टेलीफोन बूथ पर आगमन प्वासों बंटन में हैं जहाँ दो आगमनों के बीच का माध्य समय 10 मिनट है । किसी भी फोन कॉल की अवधि 3 मिनट के माध्य समय वाले चरघातांकीय बंटन में है ।

(i) इस बात की प्रायिकता क्या है कि बूथ पर आने वाले व्यक्ति को प्रतीक्षा करनी पड़ेगी ?

(ii) समय-समय पर बनने वाली पंक्ति की माध्य लंबाई क्या है ?

(iii) टेलीफोन विभाग द्वारा दूसरा बूथ तभी लगाया जाएगा जब उसे विश्वास हो जाएगा कि आने वाले व्यक्ति को फोन के लिए कम-से-कम 3 मिनट प्रतीक्षा करनी पड़ती है । दूसरे बूथ को उचित ठहराने के लिए आगमन दर को कितना बढ़ाना चाहिए ? *6*