

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME  
(BDP)****Term-End Examination****June, 2021****ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS****MTE-13 : DISCRETE MATHEMATICS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50**(Weightage : 70%)*

---

**Note :** *Question no. 1 is **compulsory**. Answer any **four** questions from questions no. 2 to 7. Use of calculators is **not** allowed.*

---

---

1. Which of the following statements are *true* and which are *false* ? Justify your answers. 10
- (a) Every even natural number is a composite number or every equilateral triangle is isosceles.
- (b) There exists a graph with edge-chromatic number zero.
- (c)  $S_4^3$  gives the number of ways in which any 3 objects can be placed in any 4 boxes.
- (d) If  $p \Rightarrow \sim q$  is true, then  $p \wedge q$  is a contradiction.
- (e)  $a_n - 6 a_{n-1} + 11 a_{n-2} - 6 a_{n-3} = 2n + 2^n$  is a recurrence relation of order 2.

2. (a) Find the Boolean expression, in DNF form, for the function  $f$  defined in tabular form below.

3

x	y	z	$f(x,y,z)$
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
1	1	0	1
0	0	0	0

- (b) Find the solution of the recurrence relation,  $a_n - 9 a_{n-1} + 23 a_{n-2} - 15 a_{n-3} = 0$ , with the initial conditions,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -1$  and  $a_2 = 1$ .

5

- (c) Find the number of ways in which 4 houses can be painted with 6 different colours, if each house has to get a different colour.

2

3. (a) Let  $G$  be a graph with  $n$  vertices. Prove that if  $G$  is a tree, then  $G$  is acyclic and has  $(n - 1)$  edges.

5

- (b) Find the number of positive integers which do not exceed 1501 and are divisible by 5 or 7.

3

- (c) Write the converse and the contrapositive of the following statement : 2

“If Zahira gets 35 marks or above out of 100 marks, then Zahira will pass.”

4. (a) Solve the following recurrence relation :

$$a_n = 3 a_{n-1} + 2, \text{ where } n \geq 1 \text{ and } a_0 = 0,$$

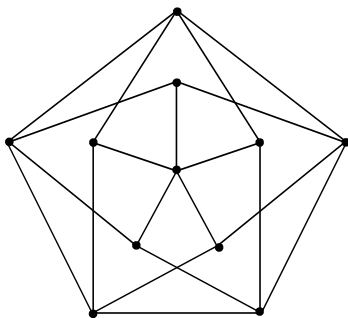
using the generating function technique. Also find  $a_6$  using your answer. 5

- (b) Write down the truth table for

$$(p \wedge q) \vee (r \rightarrow \sim p). \quad 3$$

- (c) Two unbiased dice are thrown. Find the probability that the number on the first dice is less than that on the second dice. 2

5. (a) Check whether the following graph is planar or not. Justify your answer. 5



- (b) Give a direct proof, and an indirect proof, of the following statement : 3

“If  $a, b \in \mathbf{Z}$  such that  $a$  is even and  $a + b$  is even, then  $b$  is even.”

- (c) Find the number of permutations of the letters of the word MATHEMATICAL taken all at a time. 2
- 6.** (a) Show that the number of partitions of 10 into distinct parts (integers) is equal to the number of partitions of 10 into odd parts. 4
- (b) Consider the number of words of length  $n$  made of the letters 'a' and 'b' that do not contain 2 consecutive 'a's. Denote this number by  $a_n$ .
- (i) What are the values of  $a_1, a_2, a_3$  and  $a_4$  ?
- (ii) Derive a recurrence relation for  $a_n$ . 6
- 7.** (a) Check whether or not the statement
- $$(q \rightarrow p) \rightarrow [(\sim q \rightarrow p) \rightarrow p]$$
- is a tautology. 3
- (b) If a  $k$ -regular graph has no cycles of length less than 5, show that it must have at least  $k^2 + 1$  vertices. 4
- (c) How many distinct integer solutions are there of the equation,  $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 24$ , where  $x_i \geq i, 1 \leq i \leq 5$  ? 3
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम  
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2021

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित  
एम.टी.ई.-13 : विविक्त गणित

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50  
(कुल का : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 1 करना अनिवार्य है । प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरो के प्रयोग की अनुमति नहीं है ।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए । 10
- (क) प्रत्येक सम प्राकृतिक संख्या एक भाज्य संख्या होती है या प्रत्येक समबाहु त्रिभुज समद्विबाहु होता है ।
- (ख) एक ऐसा ग्राफ है जिसकी कोर-वर्णिक संख्या शून्य होती है ।
- (ग)  $S_4^3$  किन्हीं 3 वस्तुओं को किन्हीं 4 बक्सों में रखने के तरीकों की संख्या को दर्शाता है ।
- (घ) यदि  $p \Rightarrow \sim q$  सत्य है, तो  $p \wedge q$  एक अंतर्विरोध है ।
- (ङ)  $a_n - 6 a_{n-1} + 11 a_{n-2} - 6 a_{n-3} = 2n + 2^n$  कोटि 2 वाला पुनरावृत्ति संबंध है ।

2. (क) नीचे दी गई तालिका द्वारा परिभाषित फलन  $f$  के लिए DNF के रूप में बूलीय व्यंजक ज्ञात कीजिए ।

3

x	y	z	$f(x,y,z)$
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
1	1	0	1
0	0	0	0

- (ख) प्रारंभिक प्रतिबंधों  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -1$  और  $a_2 = 1$  के साथ पुनरावृत्ति संबंध

$$a_n - 9a_{n-1} + 23a_{n-2} - 15a_{n-3} = 0$$

का हल ज्ञात कीजिए ।

5

- (ग) उन तरीकों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनमें 4 घरों को 6 भिन्न-भिन्न रंगों से इस प्रकार रंगा जाए कि प्रत्येक घर को एक अलग रंग मिले ।

2

3. (क) मान लीजिए  $G$ ,  $n$  शीर्षों वाला एक ग्राफ है । सिद्ध कीजिए कि यदि  $G$  एक वृक्ष है, तो  $G$  अचक्रीय है और इसमें  $(n-1)$  कोरें हैं ।

5

- (ख) उन धन पूर्णाकों की संख्या ज्ञात कीजिए जो 1501 से अधिक न हों और 5 या 7 से विभाज्य हों ।

3

(ग) निम्नलिखित कथन के विलोम और प्रतिस्थितक लिखिए : 2

“यदि ज़ाहिरा को 100 अंकों में से 35 या अधिक अंक मिलते हैं, तो ज़ाहिरा पास हो जाएगी।”

4. (क) जनक फलन तकनीक के प्रयोग से, निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध को हल कीजिए :

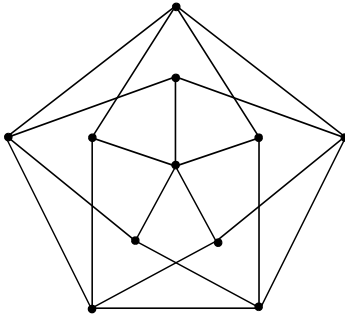
$$a_n = 3a_{n-1} + 2, \text{ जहाँ } n \geq 1 \text{ और } a_0 = 0$$

अपने उत्तर के प्रयोग से  $a_6$  भी ज्ञात कीजिए । 5

(ख)  $(p \wedge q) \vee (r \rightarrow \sim p)$  के लिए सत्यमान सारणी लिखिए । 3

(ग) दो अनभिन्नतासे फेंके जाते हैं । इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पहले पासे पर प्राप्त संख्या दूसरे पासे पर प्राप्त संख्या से छोटी है । 2

5. (क) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित ग्राफ समतलीय है या नहीं । अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 5



(ख) निम्नलिखित कथन की एक प्रत्यक्ष उपपत्ति, और एक अप्रत्यक्ष उपपत्ति दीजिए : 3

“यदि  $a, b \in \mathbf{Z}$  इस प्रकार है कि  $a$  सम है और  $a + b$  सम है, तो  $b$  भी सम है।”

(ग) शब्द MATHEMATICAL के सभी अक्षरों के क्रमचर्यों की संख्या ज्ञात कीजिए । 2

6. (क) दिखाइए कि 10 के भिन्न-भिन्न भागों (पूर्णाकों) में विभाजनों की संख्या 10 के विषम भागों में विभाजनों की संख्या के बराबर होती है । 4

(ख) अक्षरों 'a' और 'b' से बने  $n$  लम्बाई वाले उन शब्दों की संख्या पर विचार कीजिए जिनमें कोई भी 2 क्रमागत अक्षर 'a' न हों । इस संख्या को  $a_n$  से प्रदर्शित कीजिए ।

(i)  $a_1, a_2, a_3$  और  $a_4$  के मान क्या हैं ?

(ii)  $a_n$  के लिए एक पुनरावृत्ति संबंध व्युत्पन्न कीजिए । 6

7. (क) जाँच कीजिए कि कथन

$$(q \rightarrow p) \rightarrow [(\sim q \rightarrow p) \rightarrow p]$$

सर्वसत्य (पुनरुक्ति) है या नहीं । 3

(ख) यदि एक  $k$ -नियमित ग्राफ में लंबाई 5 से कम कोई चक्र नहीं है, तो दिखाइए कि इसमें कम-से-कम  $k^2 + 1$  शीर्ष होंगे । 4

(ग) समीकरण  $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 24$ , जहाँ  $x_i \geq i$ ,  $1 \leq i \leq 5$  है, के कितने भिन्न-भिन्न पूर्णांक हल हैं ? 3