BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2021

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-12 : LINEAR PROGRAMMING

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no.* ***1*** *is* ***compulsory****. Answer any* ***four*** *questions from questions no. 2 to 7. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

1. Which of the following statements are *True* and which are *False* ? Give a short proof or a counter-example in support of your answer. *5×2=10*

(a) Every feasible point in a bounded LP solution space can be determined from its feasible extreme points.

(b) The intersection of a finite number of convex sets need not be convex.

(c) The number of basic variables in a feasible solution of a balanced transportation problem with 'm' sources and 'n' destinations is mn.

(d) The optimal solution of a two-person zero-sum game always corresponds to a saddle point regardless of whether the players use pure or mixed strategies.

(e) In a dual LPP, the number of variables in primal are more than the number of constraints in dual.

2. (a) Solve the following LPP by graphical method : *6*

Max $Z = x_1 + x_2 + 3$

Subject to

$$x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(b) Write the dual of the following LPP : *4*

Min $Z = x_1 + x_2 + 3x_3$

Subject to

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

3. (a) Consider the following transportation problem :

1	2	1	4	30
3	3	2	1	50
4	2	5	9	20
20	40	10	20	

(i) Is this transportation problem balanced ? Give reasons for your answer.

(ii) Obtain a basic feasible solution to the above transportation problem by North-West Corner method. *5*

(b) For the following matrix game, write down the equivalent LPPs, and solve the game. *5*

$$\begin{array}{c} \\ A \end{array} \begin{array}{c} B \\ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

4. (a) A company manufactures two models of rollers X and Y. When preparing the 2019 budget it was found that the limitations on capacity were represented by the following weekly production maxima :

Model	Foundry	Machine shop	Contribution per model
Model X	160	200	₹ 120
Model Y	240	150	₹ 90

In addition, the material required for Model X was in short supply and only sufficient for 140 units per week could be guaranteed for the year. Formulate the LPP. *5*

(b) A company has 5 jobs to be processed by 5 mechanics. The following table gives the return in rupees when the i^{th} job is assigned to the j^{th} mechanic, (i, j = 1, 2, ... 5). How should the jobs be assigned to the mechanics so as to maximise the overall return ? *5*

		Jobs				
		1	2	3	4	5
	1	22	28	30	18	30
	2	30	34	18	11	26
Mechanics	3	31	17	23	20	27
	4	12	28	31	26	26
	5	19	23	30	25	29

5. (a) Is the set of vectors {(1, 2, 3), (3, 4, 1), (2, 3, 2)} linearly independent ? Give reasons for your answer. *3*

(b) Solve the following game : *7*

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 8 \\ 8 & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

6. (a) A company has three plants and four warehouses. The supply and demand in units and the corresponding transportation costs are given below :

	Warehouse				
Plant	I	II	III	IV	Availability
A	7	(10) 10	(20) 14	8	30
B	7	11	(5) 12	(35) 16	40
C	(20) 5	(10) 8	15	9	30
Demand	20	20	25	35	80

(i) Is this solution degenerate ? Give reason for your answer.

(ii) Check whether the given basic feasible solution is optimal. If not, modify the given solution and find an optimal solution. *6*

(b) For the following Pay-off matrix, find the value of the game and the strategies of players A and B by using graphical method : *4*

Player B

$$\text{Player A} \begin{matrix} & B_1 & B_2 & B_3 \\ A_1 & 6 & 2 & 7 \\ A_2 & 9 & 10 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 9 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

7. (a) Solve the following LPP using two-phase method : *6*

Max. $Z = 3x_1 + 2x_2$

Subject to

$2x_1 + x_2 \leq 2$

$3x_1 + 4x_2 \geq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

(b) Sketch the region $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1, y^2 \leq x\}$. Is the region convex ? Justify your answer. *4*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2021

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-12 : रैखिक प्रोग्रामन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *प्रश्न सं. **1** करना **अनिवार्य** है । प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन *सत्य* और कौन-से *असत्य* हैं ? अपने उत्तर के पक्ष में एक संक्षिप्त उपपत्ति या प्रतिउदाहरण दीजिए । *5×2=10*

(क) एक परिबद्ध LP हल में प्रत्येक सुसंगत बिंदु, इसके सुसंगत चरम बिंदुओं से प्राप्त किया जा सकता है ।

(ख) परिमित संख्या के अवमुख समुच्चयों के सर्वनिष्ठ का अवमुख होना आवश्यक नहीं है ।

(ग) किसी 'm' स्रोत और 'n' गंतव्य स्थान वाली संतुलित परिवहन समस्या के सुसंगत हल में आधारी चरों की संख्या mn होती है ।

(घ) एक द्वि-व्यक्ति शून्य-योग खेल के इष्टतम हल का हमेशा पल्याण बिंदु होता है चाहे खिलाड़ी विकल्पीय युक्ति अपनाए या अविकल्पीय युक्ति अपनाए ।

(ङ) एक द्वैती LPP में, आद्य के चरों की संख्या द्वैती के व्यवरोधों की संख्या से अधिक होती है ।

2. (क) निम्नलिखित LPP को ग्राफीय विधि से हल कीजिए : *6*

$Z = x_1 + x_2 + 3$ का अधिकतमीकरण कीजिए,

जबकि

$$x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(ख) निम्नलिखित LPP की द्वैती लिखिए : *4*

$Z = x_1 + x_2 + 3x_3$ का न्यूनतमीकरण कीजिए,

जबकि

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

3. (क) निम्नलिखित परिवहन समस्या पर विचार कीजिए :

1	2	1	4	30
3	3	2	1	50
4	2	5	9	20
20	40	10	20	

(i) क्या यह परिवहन समस्या संतुलित है ? अपने उत्तर के कारण बताइए ।

(ii) उत्तर-पश्चिम कोना विधि से उपर्युक्त परिवहन समस्या के लिए इसका आधारी सुसंगत हल ज्ञात कीजिए । 5

(ख) निम्नलिखित खेल आव्यूह के लिए तुल्य LPP लिखिए, और इस खेल को हल कीजिए । 5

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

4. (क) एक कम्पनी रोलर के दो मॉडल X और Y बनाती है । 2019 का बजट तैयार करते समय क्षमता की जो सीमाएँ पायी गयीं वे साप्ताहिक निर्माण अधिकतम सीमाएँ निम्नलिखित तालिका में दी गयी हैं :

मॉडल	ढलाई-घर	मशीन की दुकानें	योगदान प्रति मॉडल
मॉडल X	160	200	₹ 120
मॉडल Y	240	150	₹ 90

इसके साथ ही मॉडल X के लिए आवश्यक सामग्री की पूर्ति में कमी है और वर्ष में प्रति सप्ताह केवल 140 इकाइयों के लिए ही पर्याप्त है । LPP सूत्रित कीजिए । 5

(ख) एक कंपनी में 5 कारीगरों को 5 काम करने हैं । जब i^{th} काम j^{th} कारीगर (i, j = 1, 2, ... 5) को सौंपा जाता है, तो प्राप्त लाभ निम्नलिखित सारणी द्वारा प्राप्त होते हैं । प्राप्त लाभ का अधिकतमीकरण करने के लिए किस प्रकार से इन कामों को कारीगरों में सौंपा जाना चाहिए ? *5*

		काम				
		1	2	3	4	5
कारीगर	1	22	28	30	18	30
	2	30	34	18	11	26
	3	31	17	23	20	27
	4	12	28	31	26	26
	5	19	23	30	25	29

5. (क) क्या सदिश समुच्चय {(1, 2, 3), (3, 4, 1), (2, 3, 2)} रैखिकत: स्वतंत्र हैं ? अपने उत्तर के कारण दीजिए । *3*

(ख) निम्नलिखित खेल को हल कीजिए : *7*

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 8 \\ 8 & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

6. (क) एक कम्पनी के पास 3 कारखाने और 4 गोदाम हैं । इकाइयों की माँग और पूर्ति तथा उनकी संगत परिवहन लागत निम्नलिखित हैं :

	गोदाम				
कारखाना	I	II	III	IV	उपलब्धता
A	7	(10) 10	(20) 14	8	30
B	7	11	(5) 12	(35) 16	40
C	(20) 5	(10) 8	15	9	30
माँग	20	20	25	35	80

(i) क्या यह हल अपभ्रष्ट है ? अपने उत्तर का कारण दीजिए ।

(ii) जाँच कीजिए कि दिया गया प्रारम्भिक आधारी सुसंगत हल इष्टतम है या नहीं । यदि नहीं, तो हल को सुधारिए और इष्टतम हल ज्ञात कीजिए । *6*

(ख) ग्राफीय-विधि से निम्नलिखित भुगतान आव्यूह के लिए खिलाड़ियों A और B की युक्तियाँ और खेल का मान ज्ञात कीजिए : *4*

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 9 & 10 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

7. (क) द्वि-विमीय विधि से निम्नलिखित LPP को हल कीजिए : *6*

$Z = 3x_1 + 2x_2$ का अधिकतमीकरण कीजिए,

जबकि

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(ख) प्रदेश $\{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 1, y^2 \leq x\}$ आरेखित कीजिए । क्या यह प्रदेश अवमुख है ? अपने उत्तर का कारण दीजिए । *4*