

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)****Term-End Examination****June, 2021****ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50**(Weightage : 70%)*

Note : Answer any **five** questions. All computations may be done upto 3 decimal places. Use of calculators is **not** allowed. Symbols have their usual meanings.

1. (a) Show that the system of linear equations

$$x_1 + 2x_3 = 3$$

$$3x_2 = 2$$

$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 11$$

is consistent. Hence, find its solution using the LU decomposition method. 4

- (b) Obtain an approximation to $\ln 2$, by evaluating the integral $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ using

Simpson's rule with 4 subintervals. Also find the maximum error in your approximation. 4

- (c) Prove that for $h > 0$,

$$f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) = h^2 f''(\xi)$$

for some $\xi \in]x, x+2h[$. 2

2. (a) Find the Newton's divided difference interpolating polynomial for the following data :

x	f(x)
1	1
3	2
4	3
6	4

Also, estimate the value of $f(5)$.

5

- (b) Using Gauss-Jordan method, find the inverse of the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad 5$$

3. (a) The solution of the system of equations

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

is attempted by the Gauss-Jacobi and Gauss-Seidel iteration schemes. Set up the two schemes in the matrix form. Will the iteration schemes converge? Justify your answer. 5

- (b) If f_i is the value of $f(x)$ at $x = x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, \dots$, then prove that

$$f_i = E^i f_0 = \sum_{j=0}^i C(i, j) \Delta^j f_0. \quad 5$$

4. (a) Solve the system of linear equations

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$5x_1 + 4x_3 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$

using the Gaussian elimination method with partial pivoting. 5

(b) Compute $\int_1^{2.2} f(x) dx$ using the Romberg

integral technique on the approximate integrals evaluated by the trapezoidal rule taking $h = 0.4$ and 0.2 . The tabulated values of $f(x)$ are given below :

5

x	f(x)
1	2.5
1.2	1.5
1.4	3
1.6	1.5
1.8	3
2.0	4
2.2	4.5

5. (a) Estimate the value of $f(2)$ from the following data using Lagrange's interpolation.

3

x	f(x)
-1	0
0	-4
1	0
3	56

- (b) Using Horner's method find $p(-1)$ and $p'(-1)$, where

$$p(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x - 10. \quad 3$$

- (c) Set up the iteration method in matrix form for the system of linear equations :

$$3x_1 - x_3 = 1$$

$$4x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + 2x_3 = 1$$

Determine whether the method converges or not. 4

6. (a) Perform three iterations of Newton-Raphson method to approximate a root of the equation $f(x) = x^4 - x + 3 = 0$. You may take $x_0 = 0$ as the initial guess. 3

- (b) A numerical differential formula for finding $f'''(x_k)$ is given by

$$f_k''' = \frac{1}{2h^3} [f_{k+2} - f_{k-2} + 2f_{k-1} - 2f_{k+1}],$$

where $f(x_{k-n}) = f(x_k - nh)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Using the Taylor's series expansion, find the truncation error of the formula. 5

- (c) Show that $\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}$. 2

7. (a) Without actually computing the eigenvalues of the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

show that they lie in the interval $[-4, 6]$. 5

- (b) Perform three iterations of the power method to find the largest eigenvalue in magnitude and the corresponding eigenvector of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Take $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 0)$. 5

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2021

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50
(कुल का : 70%)

नोट : किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी अभिकलन 3 दशमलव स्थानों तक दिए जा सकते हैं । कैल्कुलेटरो के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।

1. (क) दिखाइए कि रैखिक समीकरण निकाय

$$x_1 + 2x_3 = 3$$

$$3x_2 = 2$$

$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 11$$

संगत है । अतः, LU वियोजन विधि से इसका हल ज्ञात कीजिए ।

4

(ख) 4 उप-अंतराल लेकर सिम्प्सन नियम से समाकल $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ का मान ज्ञात करके, $\ln 2$ का सन्निकटन ज्ञात कीजिए। साथ ही, अपने सन्निकटन में अधिकतम त्रुटि भी ज्ञात कीजिए।

4

(ग) $h > 0$ और किसी $\xi \in]x, x + 2h[$ के लिए, सिद्ध कीजिए कि

$$f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x) = h^2 f''(\xi) \quad 2$$

2. (क) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए, न्यूटन का विभाजित अंतर अंतर्वेशी बहुपद ज्ञात कीजिए :

x	f(x)
1	1
3	2
4	3
6	4

साथ ही, $f(5)$ का मान आकलित कीजिए।

5

(ख) गाउस-जॉर्डन विधि से आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए ।

5

3. (क) समीकरण निकाय

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

को गाउस-जैकोबी और गाउस-सीडल पुनरावृत्ति विधियों से हल करने का प्रयास किया जाता है । दोनों विधियों को आव्यूह रूप में लिखिए । क्या ये पुनरावृत्ति विधियाँ अभिसरित होती हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए ।

5

(ख) यदि $x = x_1 = x_0 + ih$, $i = 1, 2, \dots$, पर $f(x)$ का मान f_i है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$f_i = E^i f_0 = \sum_{j=0}^i C(i, j) \Delta^j f_0.$$

5

4. (क) आंशिक कीलकन के साथ गाउसीय निराकरण विधि से रैखिक समीकरण निकाय

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$5x_1 + 4x_3 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$

को हल कीजिए ।

5

(ख) $h = 0.4$ और 0.2 लेकर समलंबी नियम से ज्ञात किए गए सन्निकट समाकलों पर रोम्बर्ग समाकल विधि का प्रयोग करके $\int_1^{2.2} f(x) dx$ की गणना कीजिए । $f(x)$ के

सारणीबद्ध मान नीचे दिए गए हैं :

5

x	f(x)
1	2.5
1.2	1.5
1.4	3
1.6	1.5
1.8	3
2.0	4
2.2	4.5

5. (क) लग्रांज अंतर्वेशन के प्रयोग से निम्नलिखित आँकड़ों से $f(2)$ का मान आकलित कीजिए ।

3

x	f(x)
-1	0
0	-4
1	0
3	56

(ख) हॉर्नर विधि से $p(-1)$ और $p'(-1)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ दिया गया है

$$p(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x - 10. \quad 3$$

(ग) रैखिक समीकरण निकाय

$$3x_1 - x_3 = 1$$

$$4x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + 2x_3 = 1$$

के लिए पुनरावृत्ति विधि को आव्यूह रूप में लिखिए । पता लगाइए कि यह विधि अभिसरित होती है या नहीं । 4

6. (क) समीकरण $f(x) = x^4 - x + 3 = 0$ के एक मूल का सन्निकटन ज्ञात करने के लिए न्यूटन-रैफसन विधि की तीन पुनरावृत्तियाँ कीजिए । आप $x_0 = 0$ को प्रारंभिक अनुमान ले सकते हैं । 3

(ख) $f'''(x_k)$ का मान ज्ञात करने के लिए एक संख्यात्मक अवकल सूत्र

$$f'''_k = \frac{1}{2h^3} [f_{k+2} - f_{k-2} + 2f_{k-1} - 2f_{k+1}]$$

दिया हुआ है, जहाँ $f(x_{k-n}) = f(x_k - nh)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ है । टेलर श्रेणी प्रसार से इस सूत्र की रूंडन त्रुटि ज्ञात कीजिए । 5

(ग) दिखाइए कि $\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}$ है । 2

7. (क) आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

के आइगेनमानों की वस्तुतः गणना किए बिना दिखाइए कि सभी आइगेनमान अंतराल $[-4, 6]$ में हैं ।

5

(ख) आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

का परिमाण में अधिकतम आइगेनमान तथा संगत आइगेनसदिश ज्ञात करने के लिए घात विधि की तीन पुनरावृत्तियाँ कीजिए । $x_0 = (1, 1, 0)$ लीजिए ।

5
