No. of Printed Pages : 11

MTE-09

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2021

MTE-09 : REAL ANALYSIS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt* ***five*** *questions in all. Q. No.* ***1*** *is compulsory. Answer any* ***four*** *questions from Question Nos.* ***2*** *to* ***7****.*

1. Are the following statements true or false ? Give reasons for your answers : 2 each

   (a) The set $\{x \in \mathbf{R} : x \leq 5\}$ is not a closed set in $\mathbf{R}$.

   (b) The function f defined by :

   $$f(x) = -|x - 3|, \quad x \in \mathbf{R}$$

   has a local maxima.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ is a convergent series.

   (d) If a function $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ has finitely many points of discontinuity in $[a, b]$, then f is integrable on $[a, b]$.

   (e) The function $f : [2, 4] \to \mathbf{R}$, defined by $f(x) = \frac{3}{x}$ is uniformly continuous on its domain.

2. (a) Show that the set $[-5, 3[\cap] - 3, 5]$ is a neighbourhood of 2. 2

   (b) Test the following series for convergence :

   $$\frac{2.3}{4^2.5^2} + \frac{4.5}{6^2.7^2} + \frac{6.7}{8^2.9^2} + \ldots\ldots$$ 3

   (c) State the second mean value theorem of integrability. Verify it for the functions f and g defined by $f(x) = 6x$ and $g(x) = -5x$ on $[3, 4]$. 5

3. (a) Check whether the following sets are open or not : 3

   (i) The set of rational numbers Q.

   (ii) The set $\left\{ \frac{1}{n^2} \middle| n \in \mathbf{N} \right\}$

(b) Check whether the sequence $\{a_n\}$, where

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$$ is convergent or not. 5

(c) Show that the equation : 2

$$2x^3 - 3x^2 + 7x - 18 = 0$$

has a root which is real and positive.

4. (a) Evaluate : 3

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{3n} \frac{n^2}{(4n+r)^3}$$

(b) Consider the function f defined on $\mathbf{R}$ by :

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 72x - 36$$

In which of the intervals is the function f increasing, and in which of the intervals is f decreasing ? Justify your answer. 4

(c) Find the value of m so that : 3

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + m \sin 3x}{x^3}$$

is finite.

5. (a) Use the principle of mathematical induction to show that : 4

$$|\sin nx| \le n |\sin x|$$

for all $n \in \mathrm{N}$ and for all $x \in \mathbf{R}$.

(b) Give an example of each of the following : 3

(i) a function with a removable discontinuity

(ii) a totally discontinuous function

(c) Using the ε-δ argument, prove that : 3

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} (x^3 + 1) = \frac{9}{8}$$

6. (a) Show that the function $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ defined by : 4

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{when } x \text{ is rational} \\ 3, & \text{when } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

is not Riemann integrable on [0, 1].

(b) Test whether the series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^5 + x^3}$ converges uniformly or not. 3

(c) Prove that the sum of two convergent sequences is convergent. 3

7. (a) Let f be a function defined on $\mathbf{R}$ by : 4

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+5}{x^2-25}, & \text{when } x \neq 5 \\ 1 \quad , & \text{when } x = 5 \end{cases}$$

Check whether f is uniformly continuous on $[-3, 3]$ or not.

(b) Find the local extreme value of $\left(\dfrac{1}{x}\right)^x$, if it exists. 4

(c) Show that the function $f(x) = |\cos 2x|$ is a periodic function. 2

MTE-09

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2021

MTE-09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *कुल* ***पाँच*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्र. सं.* ***1*** ***अनिवार्य*** *है। प्र. सं.* ***2*** *से* ***7*** *तक किन्हीं* ***चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

---

1. क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य ? अपने उत्तरों के कारण दीजिए :

(क) समुच्चय $\{x \in \mathbf{R} : x \leq 5\}$, $\mathbf{R}$ का संवृत समुच्चय नहीं है।

(ख) $f(x) = -|x-3|, x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन का स्थानीय उच्चिष्ठ है।

(ग) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ एक अभिसारी श्रेणी है।

(घ) यदि किसी फलन $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ के $[a, b]$ में परिमित रूप से कई असांतत्य बिन्दु हैं, तो $f, [a, b]$ पर समाकलनीय होता है।

(ङ) $f(x) = \frac{3}{x}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : [2,4] \to \mathbf{R}$, अपने प्रांत पर एकसमानतः संतत है।

2. (क) दिखाइए कि समुच्चय $[-5, 3[\cap]-3, 5], 2$ का एक प्रतिवेश है। 2

(ख) निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए : 3

$$\frac{2.3}{4^2.5^2} + \frac{4.5}{6^2.7^2} + \frac{6.7}{8^2.9^2} + ...$$

(ग) समाकलनीयता के द्वितीय मध्यमान प्रमेय का कथन दीजिए। इसे $f(x) = 6x$ और $g(x) = -5x$ द्वारा परिभाषित फलनों f और g के लिए $[3, 4]$ पर सत्यापित कीजिए। 5

3. (क) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित समुच्चय विवृत हैं या नहीं : 3

(i) परिमेय संख्याओं का समुच्चय $\mathbf{Q}$

(ii) समुच्चय $\left\{\frac{1}{n^2} \middle| n \in \mathbf{N}\right\}$

(ख) जाँच कीजिए कि अनुक्रम $\{a_n\}$, जहाँ : 5

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$$

है, अभिसारी है या नहीं।

(ग) दिखाइए कि समीकरण : 2

$$2x^3 - 3x^2 + 7x - 18 = 0$$

का एक मूल वास्तविक धन संख्या है।

4. (क) निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए : 3

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{3n}\frac{n^2}{(4n+r)^3}$$

(ख) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 72x - 36$ द्वारा $\mathbf{R}$ परिभाषित फलन f लीजिए। किन अंतरालों में f वर्धमान है और किन अंतरालों में f ासमान है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 4

(ग) m का मान इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि : 3

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + m\sin 3x}{x^3}$$

परिमित हो।

5. (क) गणितीय आगमन के सिद्धान्त से दिखाइए कि सभी $n \in \mathbf{N}$ और सभी $x \in \mathbf{R}$ के लिए : 4

$$|\sin nx| \le n|\sin x|$$

(ख) निम्नलिखित में से प्रत्येक का **एक** उदाहरण दीजिए : 3

(i) अपनेय असांतत्य के साथ एक फलन

(ii) एक संपूर्णतया असंतत फलन

(ग) ε-δ तर्क का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए : 3

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}(x^3+1) = \frac{9}{8}$$

6. (क) दिखाइये कि : 4

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \\ 3, & x \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ $[0, 1]$ पर रीमान समाकलनीय नहीं है।

(ख) जाँच कीजिए कि श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^5+x^3}$ एक-समानत: अभिसरित होती है या नहीं। 3

(ग) सिद्ध कीजिए कि दो अभिसारी अनुक्रमों का योगफल भी अभिसारी होता है। 3

7. (क) मान लीजिए f: 4

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+5}{x^2-25}, & x \neq 5 \\ 1 \quad , & x = 5 \end{cases}$$

द्वारा $\mathbf{R}$ पर परिभाषित एक फलन है। जाँच कीजिए कि $[-3, 3]$ पर f एकसमानतः संतत है या नहीं।

(ख) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^x$ का स्थानीय चरम मान ज्ञात कीजिए, यदि इसका अस्तित्व है। 4

(ग) दिखाइए कि फलन $f(x) = |\cos 2x|$ एक आवर्ती फलन है। 2