

No. of Printed Pages : 8

MTE-06

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

June, 2021

MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

Note : (i) Question No. 7 is **compulsory**.

(ii) Answer any **four** questions from
Question Nos 1 to 6.

(iii) Use of calculators is not allowed.

-
-
1. (a) Let G be an abelian group and $a, b \in G$.
Show that $(ab)^n = a^n b^n$ for all $n \in \mathbf{N}$,
using the principle of induction. 4
- (b) Is $x^n - p$ irreducible in $\mathbf{Q}[x]$ for any prime
 p and natural number n ? Give reasons for
your answer. 3

P. T. O.

[2]

MTE-06

- (c) Show that every non-abelian group of order
6 is isomorphic to D_6 . 3
2. (a) Find the units of the ring of Gaussian
integers, $\mathbf{Z}[i]$. 5
- (b) Show that any two finite cyclic groups of
the same order are isomorphic. 5
3. (a) Find a subgroup of S_4 which is isomorphic
to the Klein 4 group, using Cayley's
theorem. 5
- (b) Give two proper ideals of $(\mathbf{P}(X), \Delta, \cap)$,
where X is an infinite set. Justify your
answer. 5
4. (a) Let $S = \{I, (1\ 4), (1\ 2), (1\ 4\ 2)\}$. Is S a
subgroup of S_4 ? Why or why not? 2
- (b) Check whether or not the conjugation
 $z \rightarrow \bar{z}$ is an automorphism of the ring \mathbf{C} . 4
- (c) Find two distinct cosets of $\langle (1\ 2\ 4) \rangle$ in S_4 ,
with justification. 2

[3]

MTE-06

(d) Give an example, with justification, of a relation on the set of subgroups of a group.

2

5. (a) Consider $S = \{\bar{1}, \bar{4}, \bar{11}, \bar{14}\} \subseteq \mathbf{Z}_{15}$. Make a Cayley table for S with respect to $*$, multiplication modulo 15. Use this table to check whether $(S, *)$ is a group or not. 6

(b) Give an example, with justification, of a ring which is not isomorphic to a subring of \mathbf{C} . 2

(c) Let \mathbf{R} be a ring for which 2

$$ab = ca \Rightarrow b = c \forall a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$$

Check whether or not \mathbf{R} is commutative.

6. (a) Prove that $\frac{\mathbf{R}^5}{\mathbf{R}^3} \simeq \mathbf{R}^2$, as rings. 7

(b) Find $Z(\mathbf{Q}_8)$, the centre of the group of quaternions. Also, give an element of

$$\frac{\mathbf{Q}_8}{Z(\mathbf{Q}_8)}. \quad 3$$

P. T. O.

[4]

MTE-06

7. Which of the following statements are true ? Give reasons for your answer in the form of a short proof or a counter example, whichever is appropriate : 10

(i) $\mathbf{Z}_4 \simeq \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$.

(ii) $(1 \ 2 \ 4) (3 \ 4 \ 1 \ 6)$ is an even permutation.

(iii) $\langle \bar{3} \rangle$ is a proper ideal of \mathbf{Z}_{10} .

(iv) $d : \mathbf{Z}[x] \rightarrow \mathbf{N} \cup \{0\} : d(f(x)) = \deg f(x) + 2$ is a Euclidean valuation on $\mathbf{Z}[x]$.

(v) $\{\pi, A, 0\}$ is a set, where A is the set of all the students on the rolls of IGNOU in 2021.

[5]

MTE-06

MTE-06

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2021

MTE-06 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : (i) प्रश्न सं. 7 करना जरूरी है।

(ii) प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iii) कैल्कुलेटरो के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

1. (क) मान लीजिए G एक आबेली समूह है, और $a, b \in G$ । आगमन के सिद्धान्त का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए कि सभी $n \in \mathbb{N}$ के लिए $(ab)^n = a^n b^n$ । 4

P. T. O.

[6]

MTE-06

- (ख) किसी अभाज्य संख्या p और प्राकृतिक संख्या n के लिए, क्या $x^n - p$, $\mathbb{Q}[x]$ में अखण्डनीय है ? अपने उत्तर के कारण दीजिए। 3
- (ग) दिखाइए कि कोटि 6 वाला प्रत्येक अन्-आबेली समूह D_6 के तुल्याकारी है। 3
2. (क) गाउसीय पूर्णाकों के वलय $\mathbb{Z}[i]$ के मात्रक ज्ञात कीजिए। 5
- (ख) दिखाइए कि समान कोटि वाले कोई भी दो परिमित चक्रीय समूह तुल्याकारी होते हैं। 5
3. (क) कैली प्रमेय का प्रयोग करके S_4 का एक ऐसा उपसमूह ज्ञात कीजिए जो क्लाइन 4-समूह के तुल्याकारी हो। 5
- (ख) $(\mathbf{P}(X), \Delta, \cap)$, जहाँ X एक अनंत समुच्चय है, की दो उचित गुणजावलियाँ दीजिए। अपने उत्तर की पुष्टि भी कीजिए। 5

4. (क) मान लीजिए $S = \{I, (1\ 4), (1\ 2), (1\ 4\ 2)\}$ है। क्या S, S^4 का उपसमूह है ? क्यों या क्यों नहीं ? 2
- (ख) जाँच कीजिए कि क्या संयुग्मन $z \rightarrow \bar{z}$ वलय C पर एक स्वाकारिता है या नहीं। 4
- (ग) $\langle (1\ 2\ 4) \rangle$ के दो अलग सहसमुच्चय, पुष्टि के साथ, ज्ञात कीजिए। 2
- (घ) किसी समूह के उपसमूहों के समुच्चय पर, पुष्टि सहित, एक संबंध का उदाहरण दीजिए। 2
5. (क) $S = \{\bar{1}, \bar{4}, \bar{11}, \bar{14}\} \subseteq \mathbf{Z}_{15}$ पर विचार कीजिए। $*$, यानी गुणन मॉड्यूलो 15 के सापेक्ष S के लिए कैली सारणी बनाइए। इस सारणी का प्रयोग करके जाँच कीजिए कि $(S, *)$ एक समूह है या नहीं। 6
- (ख) पुष्टि सहित एक ऐसे वलय का उदाहरण दीजिए जो C के किसी भी उपवलय के तुल्याकारी न हो। 2
- (ग) मान लीजिए R एक ऐसा वलय है जिसके लिए :
 $ab = ca \Rightarrow b = c \forall a, b, c \in R, a \neq 0$
जाँच कीजिए कि R क्रमविनिमेय है या नहीं। 2

P. T. O.

6. (क) सिद्ध कीजिए कि वलयों के रूप में $\frac{\mathbf{R}^5}{\mathbf{R}^3} \cong \mathbf{R}^2$ । 7
- (ख) चतुष्टयी समूह का केन्द्र, $Z(Q_8)$ ज्ञात कीजिए। साथ ही, $\frac{Q_8}{Z(Q_8)}$ का एक अवयव दीजिए। 3
7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं ? अपने उत्तरों के कारण दीजिए एक छोटी उपपत्ति या प्रतिउदाहरण के रूप में, जो भी उचित हो : 10
- (i) $\mathbf{Z}_4 \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$
- (ii) $(1\ 2\ 4)(3\ 4\ 1\ 6)$ एक सम क्रमचय है।
- (iii) $\langle \bar{3} \rangle, \mathbf{Z}_{10}$ की एक उचित गुणजावली है।
- (iv) $d : \mathbf{Z}[x] \rightarrow \mathbf{N} \cup \{0\} : d(f(x)) = \deg f(x) + 2$
 $\mathbf{Z}[x]$ पर एक यूक्लिडीय मानांकन है।
- (v) $\{\pi, A, 0\}$ एक समुच्चय है, जहाँ A इग्नू के उन सभी छात्रों का समुच्चय है जिनका नामांकन 2021 में हुआ है।

MTE-06

4,290