No. of Printed Pages : 12 **MTE-02**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2021

MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) Question No. 4 is **compulsory**.*

*(ii) Attempt any **four** questions from the rest of the six questions.*

*(iii) Use of calculators is **not** allowed.*

1. (a) Are the following four vectors linearly independent in $\mathbb{R}^4$? Give reasons for your answer : 4

$$\alpha_1 = (1, 1, 2, 4)$$

$$\alpha_2 = (2, -1, -5, 2)$$

$$\alpha_3 = (1, -1, -4, 0)$$

$$\alpha_4 = (2, 1, 1, 6)$$

(b) Find the orthogonal canonical form of $x^2 + 14xy + y^2$, giving the transformations used for doing so. 6

2. (a) Let $P = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$. Determine P^{-1} using the Cayley-Hamilton theorem. Further, use P^{-1} to express (x_1, x_2, x_3) in terms of (–1, 0, 0); (4, 2, 0); (5, – 3, 8). 6

(b) Find an orthonormal basis of $\mathbb{R}^3$, of which $\left(0, \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ is one element. 4

3. (a) Check whether or not the following matrix is diagonalizable in $\mathbb{R}$: 3

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Let $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be a linear operator. Suppose the matrix of T with respect to the ordered basis :

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

is $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Find the matrix of T with respect to the ordered basis :

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Also check whether or not T is an isomorphism. 7

4. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer with a short proof or a counter example : 10

(i) $\mathbb{R}^2$ has infinitely many non-zero, proper vector subspaces.

(ii) If $T : V \to W$ is a one-one linear transformation between finite-dimensional vector spaces V and W, then T is invertible.

(iii) If some eigen values of a matrix are repeated, the matrix is not diagonalisable.

(iv) $\mathbb{R}^3$ is an inner product space over the inner product :

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$$

(v) For any two subspaces W_1, W_2 of $\mathbb{R}^3$ of dimension 2, $W_1 + W_2$ is a direct sum.

5. (a) Consider the linear operator $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, defined by :

$$T(z_1, z_2, z_3, z_4) = (-iz_2, iz_1, -iz_4, z_3)$$

Find $T^*(w_1, w_2, w_3, w_4)$ with respect to the standard inner product on $\mathbb{C}^4$, where $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{C}$. Check whether or not T is self-adjoint with respect to the standard inner product on $\mathbb{C}^4$. Further, check whether or not T is unitary under the standard inner product on $\mathbb{C}^4$. 6

(b) Find the inverse of $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, using the row-reduction method. 4

6. (a) Find the radius and centre of the circular section of the sphere $|r| = 4$, cut-off by the plane : 5

$$r.(2i - j + 4k) = 3.$$

(b) (i) Check that $T = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, defined by :

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 - x_3)$$

is a linear operator. Also, find the kernel.

(ii) State the rank-nullity theorem. Use it to find the rank of T. 5

7. (a) Check that $\{1, (x+1), (x+1)^2\}$ is a basis of the vector space of polynomials over $\mathbb{R}$ of degree at most 2. Find the coordinates of $3 + x + 2x^2$ with respect to this basis. 5

(b) Let $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be the linear transformation defined by : 5

$$T(x, y, z) = (-x, x - y, 3x + 2y + z)$$

Check whether T satisfies the polynomial $(x-1)(x+1)^2$. Also find the minimal polynomial of T.

MTE-02

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2021

एम.टी.ई.-02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i) प्रश्न सं **4 अनिवार्य** है।*

*(ii) शेष छः प्रश्नों में से किन्हीं **चार** प्रश्नों को हल कीजिए।*

(iii) कैल्कुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) क्या निम्नलिखित चार सदिश $\mathbb{R}^4$ पर रैखिकतः स्वतन्त्र हैं ? अपने उत्तर का कारण बताइए : 4

$$\alpha_1 = (1, 1, 2, 4)$$
$$\alpha_2 = (2, -1, -5, 2)$$
$$\alpha_3 = (1, -1, -4, 0)$$
$$\alpha_4 = (2, 1, 1, 6)$$

(ख) आपके द्वारा प्रयोग किए गए रूपांतरणों को बताते हुए $x^2 + 14xy + y^2$ का लांबिक विहित समघात ज्ञात कीजिए। 6

2. (क) मान लीजिए :

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

कैली–हैमिल्टन प्रमेय द्वारा P^{-1} निकालिए। आगे P^{-1} को प्रयोग करके (x_1, x_2, x_3) को (–1, 0, 0); (4, 2, 0); (5, –3, 8) के पदों में व्यक्त कीजिए। 6

(ख) $\mathbb{R}^3$ का एक ऐसा प्रसामान्य लांबिक आधार ज्ञात कीजिए जिसमें $\left(0, \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ एक अवयव है। 4

3. (क) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित आव्यूह विकर्णनीय है या नहीं : 3

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ख) मान लीजिए $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ एक रैखिक संकारक है और क्रमित आधार :

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

के सापेक्ष T का आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।

क्रमित आधार :

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

के सापेक्ष T का आव्यूह ज्ञात कीजिए। यह भी जाँच कीजिए की T तुल्यकारिता है या नहीं। 7

4. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तरों की एक लघु उपपत्ति या एक प्रत्युदाहरण से पुष्टि कीजिए : 10

(i) $\mathbb{R}^2$ के अनंतः कई शून्येतर, उचित सदिश उपसमष्टियाँ हैं।

(ii) यदि $T : V \to W$ दो परिमित-विमीय सदिश समष्टियों के बीच एक एकैकी रैखिक रूपान्तरण है, तो T एक व्युत्क्रमणीय है।

(iii) यदि एक आव्यूह के कुछ आइगेन मान समान हैं, तो आव्यूह विकर्णनीय नहीं है।

(iv) $\mathbb{R}^3$ आन्तर्गुणन फल :

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$$

के सापेक्ष एक आंतर्गुणन समष्टि है।

(v) $\mathbb{R}^3$ के कोई भी विमा 2 वाले उपसमष्टियाँ W_1, W_2 के लिए $W_1 + W_2$ एक अनुलोम योगफल है।

5. (क) रैखिक संकारक $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ लीजिए जो :

$$T(z_1, z_2, z_3, z_4) = (-iz_2, iz_1, -iz_4, z_3)$$

द्वारा परिभाषित है। $\mathbb{C}^4$ पर मानक आन्तर्गुणन फल के सापेक्ष $T^*(w_1, w_2, w_3, w_4)$ निकालिए, जहाँ $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{C}$। जाँच कीजिए कि $\mathbb{C}^4$ पर मानक आंतर्गुणन फल के सापेक्ष T स्वसंलग्न है या नहीं। आगे यह भी जाँच कीजिए कि $\mathbb{C}^4$ पर मानक आंतर्गुणन फल के सापेक्ष T ऐकिक है या नहीं। 6

(ख) पंक्ति समानयन द्वारा आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ के प्रतिलोम निकालिए। 4

6. (क) समतल $r.(2i - j + 4k) = 3$ द्वारा गोले $|r| = 4$, के काटे गए वृत्तीय परिच्छेद की त्रिज्या और केन्द्र ज्ञात कीजिए। 5

(ख) (i) जाँच कीजिए कि $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 - x_3)$$

से परिभाषित, एक रैखिक संकारक है। T की अष्टि भी ज्ञात कीजिए।

(ii) जाति-शून्यता प्रमेय बताइये। उसका प्रयोग करके T की जाति निकालिए। 5

7. (क) जाँच कीजिए कि $\{1, (x+1), (x+1)^2\}$ अधिकतम कोटि 2 वाले बहुपदों की सदिश समष्टि के लिए एक आधार है। इस आधार के सापेक्ष $3 + x + 2x^2$ के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। 5

(ख) मान लीजिए $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: 5

$$T(x, y, z) = (-x, x - y, 3x + 2y + z)$$

से परिभाषित है। जाँच कीजिए कि T बहुपद $(x-1)(x+1)^2$ को संतुष्ट करता है। T का अल्पिष्ट बहुपद भी निकालिए।