

No. of Printed Pages : 11

**MTE-01**

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME  
(BDP)**

**Term-End Examination**

**June, 2021**

**MTE-01 : CALCULUS**

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

**Note :** (i) Question No. 1 is compulsory.

(ii) Attempt any **four** questions from  
Question Nos. 2 to 7.

(iii) Use of calculator is not allowed.

Which of the following statements are true ? Give a short proof or a counter example in support of your answers : 2 each

1. (i) If the functions  $f$  and  $g$  are defined on  $\mathbf{R}$  by  $f(x) = 2|3 - x|$  and  $g(x) = 3x - 2$ , then  $(f \circ g)(2) = -2$ .

**P. T. O.**

- (ii) The tangent to the curve  $x^2 + y^2 = 3x$  at the point  $(3, 0)$  is parallel to the  $x$ -axis.

(iii)  $\frac{d}{dx} \left[ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\sqrt{x}} \cot^3(t^2) dt \right] = \frac{1}{\sqrt{x}} \cot^3 x - 2$

(iv)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 + x - 2} = \frac{3}{5}$

- (v) The function  $f$ , defined on  $\mathbf{R}$  by :

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 13x + 5),$$

is increasing in every interval of  $\mathbf{R}$ .

2. (a) Find the maximum possible domain of the function  $f$ , given by : 2

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{3-x}}$$

- (b) Evaluate : 4

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x + \sin x} dx.$$

- (c) Find the volume of the solid obtained by revolving the curve  $3x^2 + 4y^2 = 12$ , about the axis of  $x$ . 4

[ 3 ]

MTE-01

3. Trace the curve :

$$y^2(x+2) = x^2(1-x),$$

clearly stating all the properties used for tracing it. 10

4. (a) Using the trapezoidal rule, evaluate

$$\int_5^{15} \frac{dx}{x^2 - 3},$$

dividing the interval, [5, 15] into five equal intervals. 4

(b) For which values of  $k$ , is the function  $f$ , defined by :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2-x) - \sin(2+x)}{x}, & x \neq 0 \\ k \cos 2, & x = 0 \end{cases}$$

continuous at  $x = 0$  ? Justify your answer.

2

(c) If :

$$y = e^{m \tan^{-1} x},$$

find an equation relating the derivatives

$y_n, y_{n+1}$  and  $y_{n+2}$  of  $y$ . 4

P. T. O.

[ 4 ]

MTE-01

5. (a) Find the area of the loop of the curve : 4

$$x^3 + y^3 - 6xy = 0.$$

(b) Let :

$$f : \mathbf{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbf{R}$$

be a function defined by

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3}.$$

Find a  $\delta > 0$  such that  $|f(x) - 7| < \frac{1}{50}$  for

$0 < |x - 3| < \delta$ . Hence, find  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ . 4

(c) Differentiate : 2

$$\tan^{-1} \left( \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \right) \text{ w. r. t. } \frac{x}{4}.$$

6. (a) Prove that  $x \geq \sin x$  for all  $x \in [0, 2\pi]$ . 4

(b) Find the derivative of :

$$(\cot x)^{\tan x} + (\cos x)^{\sin x}$$

with respect to  $x$ . 3

[ 5 ]

MTE-01

(c) Evaluate :

3

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+4)}$$

7. (a) If :

$$I_n = \int \cot^n x \, dx \quad (n > 1),$$

then show that :

$$(n-1)(I_n + I_{n-2}) = -\cot^{n-1} x.$$

Hence, find  $\int \cot^3 x \, dx$ . 5

(b) Find the approximate value of  $(0.999)^{5/2}$ , taking the first three terms of Maclaurin's series for  $(1-x)^{5/2}$ . 5

[ 6 ]

MTE-01

**MTE-01**

स्नातक उपाधि कार्यक्रम ( बी.डी.पी. )

सत्रांत परीक्षा

जून, 2021

एम.टी.ई.-01 : कैलकुलस

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : (i) प्र. सं. 1 अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न संख्या 2 से 7 तक कोई चार प्रश्न कीजिए।

(iii) कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं ?

अपने उत्तर के पक्ष में एक संक्षिप्त उपपत्ति या प्रति उदाहरण दीजिए : प्रत्येक 2

(i) यदि फलन  $f$  और  $g$ ,  $\mathbf{R}$  पर $f(x) = 2|3-x|$  और  $g(x) = 3x-2$  द्वारापरिभाषित हैं, तो  $(f \circ g)(2) = -2$ ।

P. T. O.

[ 7 ]

MTE-01

(ii) बिन्दु (3,0) पर वक्र  $x^2 + y^2 = 3x$  की स्पर्शरेखा  $x$ -अक्ष के समांतर है।

(iii) 
$$\frac{d}{dx} \left[ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\sqrt{x}} \cot^3(t^2) dt \right] = \frac{1}{\sqrt{x}} \cot^3 x - 2$$

(iv) 
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 + x - 2} = \frac{3}{5}$$

(v)  $\mathbf{R}$  पर :

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 13x + 5)$$

द्वारा परिभाषित फलन  $f$ ,  $\mathbf{R}$  के प्रत्येक अंतराल

में वर्धमान है।

2. (क)  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{3-x}}$  द्वारा परिभाषित फलन  $f$  का

अधिकतम संभावित प्रान्त ज्ञात कीजिए। 2

(ख)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x + \sin x} dx$  का मान ज्ञात कीजिए। 4

[ 8 ]

MTE-01

(ग) वक्र :

$$3x^2 + 4y^2 = 12$$

का  $x$ -अक्ष के सापेक्ष घूर्णन से बने ठोस का

आयतन ज्ञात कीजिए।

4

3. वक्र :

$$y^2(x+2) = x^2(1-x)$$

का आरेखण कीजिए और आरेखण में प्रयोग की किये

गये गुणधर्मों को लिखिए।

10

4. (क) समलंबी नियम का प्रयोग करके, अंतराल

[5,15] को पाँच बराबर अंतरालों में विभाजित

करते हुए :

$$\int_5^{15} \frac{dx}{x^2 - 3}$$

ज्ञात कीजिए।

4

P. T. O.

[ 9 ]

MTE-01

(ख)  $k$  के किन मानों के लिए

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2-x) - \sin(2+x)}{x}, & x \neq 0 \\ k \cos 2, & x = 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन  $f, x = 0$  पर सतत् है।

अपने उत्तर का स्पष्टीकरण दीजिए। 2

(ग) यदि  $y = e^{m \tan^{-1} x}$  है, तो  $y$  के अवकलजों $y_n, y_{n+1}$  और  $y_{n+2}$  के बीच संबंध स्थापित

करने वाली समीकरण ज्ञात कीजिए। 4

5. (क) वक्र :

$$x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

के पाश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 4

(ख)  $f(x) = \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3}$  द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbf{R}$  लीजिए।  $\delta > 0$  ज्ञात

[ 10 ]

MTE-01

कीजिए कि  $0 < |x - 3| < \delta$  के लिए

$$|f(x) - 7| < \frac{1}{50} \text{ है। इस प्रकार } \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

ज्ञात कीजिए। 4

(ग)  $\tan^{-1} \left( \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \right)$  का  $\frac{x}{4}$  के सापेक्ष

अवकलन कीजिए। 2

6. (क) सभी  $x \in [0, 2\pi]$  के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$x \geq \sin x$$

4

(ख)  $(\cot x)^{\tan x} + (\cos x)^{\sin x}$  का  $x$  के सापेक्ष

अवकलन कीजिए। 3

(ग)  $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+4)}$  का मान ज्ञात कीजिए। 3

7. (क) यदि :

$$I_n = \int \cot^n x dx \quad (n > 1)$$

P. T. O.

है, तो दर्शाइए कि

$$(n - 1)(I_n + I_{n-2}) = -\cot^{n-1} x$$

है। इस प्रकार  $\int \cot^3 x dx$  ज्ञात कीजिए। 5

(ख)  $(1 - x)^{5/2}$  के मैक्लॉरिन श्रेणी प्रसारण के पहले  
तीन पदों द्वारा  $(0.999)^{5/2}$  का सन्निकटन मान  
ज्ञात कीजिए। 5