

**BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)**

**Term-End Examination**

**June, 2016**

00437

**PHYSICS**

**PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN  
PHYSICS-III**

*Time : 2 hours*

*Maximum Marks : 50*

---

**Note :** *All questions are compulsory. The marks for each question are indicated against it. Symbols have their usual meanings.*

---

1. Attempt any **five** parts :

$5 \times 2 = 10$

- (a) Define symmetric and antisymmetric tensors.
- (b) If  $H$  is a Hermitian matrix and  $U$  is a unitary matrix, show that  $U^\dagger H U$  is a Hermitian matrix.
- (c) Locate the singularities of the function  $f(z) = \frac{\ln(z + 3i)}{z^2}$ .
- (d) Show that the function  $f(z) = z^2$  is analytic everywhere.

- (e) Show that the roots of the equation  $z^4 - 1 = 0$  form a cyclic group of order 4.
- (f) Determine whether the Laplace transform of  $f(t) = \exp(t^2)$  exists or not.
- (g) Plot the Bessel functions of the first kind of order 0 and 1.
- (h) Evaluate the integral  $\int_{-1}^1 P_1(x) P_1'(x) dx$ .

2. Attempt any *two* parts :

- (a) Verify the Cayley-Hamilton theorem for the rotation matrix

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad 5$$

- (b) For the quadratic equation  $2x^2 + 4xy - y^2 = 24$ , write down the matrix of coefficients and diagonalize it. Recast it in new variables and identify the conic section it represents. 5
- (c) (i) Show that the dot product of two 3-D vectors is a scalar. 3
- (ii) Show that the set of all matrices of order  $2 \times 2$  is a group under addition of matrices. 2

3. Attempt any *two* parts :

2×5=10

(a) Write the Laurent series expansion of  $\frac{e^z}{(z-1)^2}$  about  $z = 1$  and determine the type of singularity.

(b) Evaluate the integral  $\oint_C \frac{e^z dz}{z^2 + 1}$ , where C is the circle  $|z| = 2$ .

(c) Show that :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + 2\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$$

4. Attempt any *two* parts :

2×5=10

(a) A rectangular slit is described by the function

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| > a \\ 1 & |x| < a \end{cases}$$

Show that the amplitude of diffraction pattern is given by  $F(t)$ , the Fourier transform of  $f(x)$  as

$$F(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin at}{t}$$

- (b) Calculate the inverse Laplace transform of

$$F(s) = \frac{3s + 10}{s^2 - 25}.$$

- (c) Using the Laplace transforms, solve the initial value problem

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 7.$$

5. Attempt any *one* part :

1×10=10

- (a) Using the generating function

$$g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} \quad \text{for the Legendre}$$

polynomials, show that

$$2 P_1(x) - 5x P_2(x) + 3 P_3(x) = 0.$$

- (b) Using the expression

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(m + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

for Bessel function of the first kind of order  $m$ , show that

$$[J_{1/2}(x)]^2 + [J_{-1/2}(x)]^2 = \frac{2}{\pi x}.$$

---

विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2016

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं। प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

1. कोई पाँच भाग हल कीजिए :

5×2=10

(क) सममित और प्रतिसममित टेन्सर की परिभाषा दीजिए।

(ख) यदि  $H$  एक हर्मिटी आव्यूह हो और  $U$  एक ऐकिक आव्यूह हो, तो सिद्ध कीजिए कि  $U^† H U$  एक हर्मिटी आव्यूह है।

(ग) फलन  $f(z) = \frac{\ln(z+3i)}{z^2}$  की विचित्रताओं का निर्धारण कीजिए।

(घ) सिद्ध कीजिए कि फलन  $f(z) = z^2$  हर जगह विश्लेषिक है।

- (ड) सिद्ध कीजिए कि समीकरण  $z^4 - 1 = 0$  के मूल, कोटि 4 का एक चक्रीय समूह बनाते हैं ।
- (च) निर्धारित कीजिए कि  $f(t) = \exp(t^2)$  के लाप्लास रूपांतर का अस्तित्व है या नहीं ।
- (छ) 0 और 1 कोटियों वाले प्रथम प्रकार के बेसल फलनों के आलेख खींचिए ।
- (ज) समाकल  $\int_{-1}^1 P_1(x) P_1'(x) dx$  का मूल्यांकन कीजिए ।

2. कोई दो भाग हल कीजिए :

(क) घूर्णन आव्यूह

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

के लिए कैले-हैमिल्टन प्रमेय को सत्यापित कीजिए । 5

(ख) द्विघात समीकरण  $2x^2 + 4xy - y^2 = 24$  के गुणांकों का आव्यूह लिखिए और उसका विकर्णन कीजिए । उसे नए चरों में प्रस्तुत कीजिए और बताइए कि यह किस शांकव परिच्छेद को निरूपित करता है । 5

(ग) (i) सिद्ध कीजिए कि दो त्रिविम सदिशों का अदिश गुणनफल एक अदिश होता है । 3

(ii) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह योग के अधीन कोटि  $2 \times 2$  वाले सभी आव्यूहों का समुच्चय एक समूह होता है । 2

3. कोई दो भाग हल कीजिए :

2×5=10

(क)  $z = 1$  के प्रति  $\frac{e^z}{(z-1)^2}$  का लौराँ श्रेणी प्रसार लिखिए  
और विचित्रता का प्रकार ज्ञात कीजिए ।

(ख) समाकल  $\oint_C \frac{e^z dz}{z^2 + 1}$  का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ  
 $C, |z| = 2$  का वृत्त है ।

(ग) सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + 2\cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$$

4. कोई दो भाग हल कीजिए :

2×5=10

(क) एक आयताकार एकल स्लिट निम्न फलन द्वारा निरूपित है :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| > a \\ 1 & |x| < a \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि विवर्तन प्रतिरूप का आयाम  $F(t)$  से,  
जो  $f(x)$  का फूरिये रूपांतर है, प्राप्त होता है

$$F(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin at}{t}$$

(ख) फलन  $F(s) = \frac{3s + 10}{s^2 - 25}$  का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर

परिकलित कीजिए ।

(ग) लाप्लास रूपांतर का प्रयोग कर निम्नलिखित आदि मान समस्या

$$y'' - 4y' + 3y = 0; y(0) = 3, y'(0) = 7$$

को हल कीजिए ।

5. कोई एक भाग हल कीजिए :

1×10=10

(क) लेजान्द्रे बहुपदों के लिए जनक फलन

$$g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}$$
 का प्रयोग करते हुए,

सिद्ध कीजिए कि

$$2 P_1(x) - 5x P_2(x) + 3 P_3(x) = 0.$$

(ख) कोटि  $m$  वाले प्रथम प्रकार के बेसल फलन के व्यंजक

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए कि

$$[J_{1/2}(x)]^2 + [J_{-1/2}(x)]^2 = \frac{2}{\pi x}.$$