

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

June, 2016

01057

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-13 : DISCRETE MATHEMATICS**

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 1 is compulsory. Answer any four questions from questions no. 2 to 7. Use of calculators is not allowed.*

1. Which of the following statements are *true* and which are *false* ? Justify your answer. $5 \times 2 = 10$
- (a) The statement 'If $x^2 + y^2 = 0$ for any two positive integers x and y , then xy is prime,' is true.
 - (b) For any graph G , $\Delta(G) = \chi(G)$.
 - (c) The recurrence relation $a_n = 4 a_{n-1} + n^3$ is of order 1 and degree 3.
 - (d) The number of possible outcomes obtained by casting a die 9 times is $C(9, 7)$.
 - (e) There is a graph G with degree sequence $\{1, 2, 3, 3, 4, 5\}$.

2. (a) Prove that the following statements are equivalent for a graph G : 4
- (i) G is a tree.
 - (ii) Any two vertices in G are connected by a unique path.
- (b) Verify whether $[p \rightarrow (p \vee \sim q)] \rightarrow \sim p$ is a tautology using a truth table. 3
- (c) Using the principle of inclusion-exclusion find the number of integer solutions of the equation $x + y + z = 18$, with $0 < x \leq 6, 0 < y \leq 7, 0 < z \leq 8$. 3
3. (a) Show, by Mathematical induction that, $(n + 1)^2 < 2n^2, \forall n \geq 3$. 4
- (b) Solve the recurrence relation $a_n - 10 a_{n-1} + 31 a_{n-2} - 30 a_{n-3} = 0, n \geq 3$ with the initial conditions $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = -1$. 4
- (c) There are 38 different time periods during which classes at a university can be scheduled. If there are 677 different classes, how many different rooms will be needed ? 2
4. (a) If a five digit number is chosen at random, what is the probability that the product of digits is 28 ? 3
- (b) (i) Define the hypercube Q_n .
(ii) Draw Q_3 .
(iii) Is Q_3 Eulerian ? Justify your answer.
(iv) Is Q_3 Hamiltonian ? Justify your answer. 4

(c) Solve the recurrence relation,

$$a_n = a_{n-1} + 3(n-1), \quad a_0 = 1.$$

3

5. (a) Check the validity of the following argument :

5

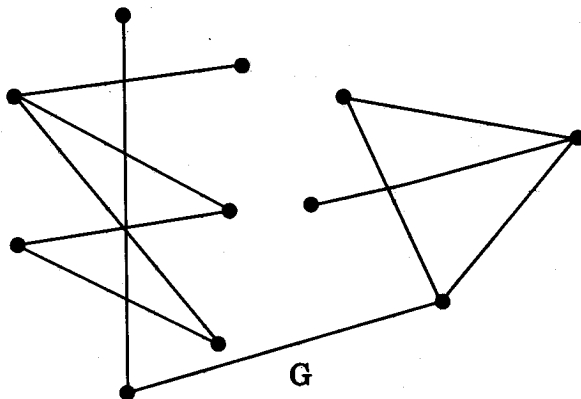
If I do not get 96%, I will not get a scholarship.

If I work hard, I will get 96%.

I worked hard.

Therefore I got a scholarship.

(b) Consider the following graphs :



(i) Is G connected ? If not, show that G is a disjoint union of its components.

(ii) Find the length of the longest path in G.

(iii) Give the longest cycle in G.

(iv) Is G bipartite ? Justify.

5

6. (a) Using the generating functions approach, find the number of integer solutions to the linear equation, $x_1 + x_2 + x_3 = n$, where $1 \leq x_1 \leq 3$, $-1 \leq x_2 \leq 1$ and $x_3 \geq 3$. 6
- (b) Show that the number of partitions of 10 into distinct parts (integers) is equal to the number of partitions of 10 into odd parts. 4
7. (a) An English word is called a palindrome if it reads the same whether read from left to right or from right to left, ROTOR, for example. Let a_n be the number of English words of length n , not necessarily meaningful, which are palindromes. We consider a single letter a palindrome.
- (i) What are a_1 and a_2 ?
- (ii) Set up a recurrence for a_n .
- (iii) Check that
- $$a_n = (\sqrt{26})^n \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{26}}{2} \right)^n + (-1)^n \left(\frac{1 - \sqrt{26}}{2} \right)^n \right\}$$
- is a solution to the recurrence.
- (iv) Find a_3 using the above expression for a_n . 5
- (b) Express the polynomial $x^4 + x^2 + x$ in terms of the factorial polynomials $[x]_4$, $[x]_3$, etc. 3
- (c) Show that $K_{100, 101}$ is not Hamiltonian. 2

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2016

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-13 : विविक्त गणित

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50
(कुल का : 70%)

नोट: प्रश्न सं. 1 करना अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से कोई चार प्रश्न कीजिए। कैलकुलेटरो के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5×2=10
- (क) कथन 'यदि किन्हीं दो धन पूर्णांकों x और y के लिए $x^2 + y^2 = 0$, तब xy अभाज्य है', सत्य है।
- (ख) किसी भी ग्राफ G के लिए $\Delta(G) = \chi(G)$.
- (ग) पुनरावृत्ति सम्बन्ध $a_n = 4a_{n-1} + n^3$ कोटि 1 और घात 3 का है।
- (घ) एक पाँसे को 9 बार डालने से प्राप्त संभावित परिणामों की संख्या $C(9, 7)$ है।
- (ङ) कोटि अनुक्रम $\{1, 2, 3, 3, 4, 5\}$ वाला ग्राफ G हो सकता है।

2. (क) सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित कथन ग्राफ G के लिए तुल्य हैं : 4
- (i) G एक वृक्ष है ।
- (ii) G में कोई दो शीर्ष ठीक एक पथ द्वारा संबद्ध होते हैं ।
- (ख) सत्य सारणी द्वारा सत्यापित कीजिए कि क्या $[p \rightarrow (p \vee \sim q)] \rightarrow \sim p$ एक सर्व सत्य कथन (पुनरुक्ति) है ? 3
- (ग) आविष्टि-अपवर्जन नियम से समीकरण $x + y + z = 18$ के पूर्णांक हलों की संख्या ज्ञात कीजिए, जहाँ $0 < x \leq 6, 0 < y \leq 7, 0 < z \leq 8$. 3
3. (क) गणितीय आगमन द्वारा दिखाइए कि $(n + 1)^2 < 2n^2, \forall n \geq 3$. 4
- (ख) प्रारंभिक प्रतिबंधों $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = -1$ वाले पुनरावृत्ति सम्बन्ध $a_n - 10a_{n-1} + 31a_{n-2} - 30a_{n-3} = 0, n \geq 3$ को हल कीजिए । 4
- (ग) ऐसी 38 अलग-अलग समय अवधियाँ हैं जिनके दौरान विश्वविद्यालय की कक्षाओं की अनुसूची बनाई जा सकती है । यदि 677 अलग-अलग कक्षाएँ हैं, तब कितने अलग-अलग कमरों की आवश्यकता होगी ? 2
4. (क) यदि एक पाँच अंक वाली संख्या यादृच्छया चुनी जाती है, तब इसकी क्या प्रायिकता है कि अंकों का गुणनफल 28 होगा ? 3
- (ख) (i) अतिघन Q_n को परिभाषित कीजिए ।
- (ii) Q_3 का चित्र बनाइए ।
- (iii) क्या Q_3 ऑयलरी है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए ।
- (iv) क्या Q_3 हैमिल्टोनियन है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 4

(ग) पुनरावृत्ति सम्बन्ध

$$a_n = a_{n-1} + 3(n-1), a_0 = 1 \text{ को हल कीजिए।} \quad 3$$

5. (क) निम्नलिखित तर्क की मान्यता की जाँच कीजिए : 5

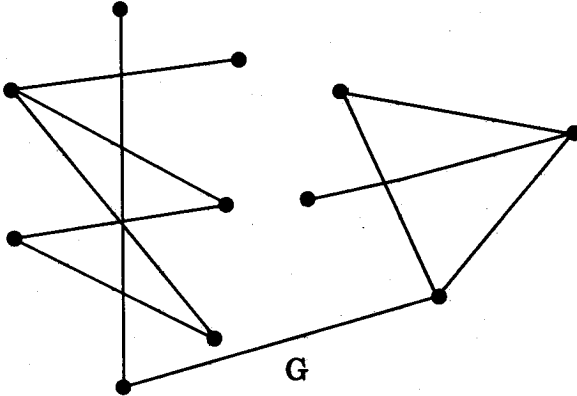
यदि मैं 96% अंक प्राप्त नहीं करता, तो मुझे छात्रवृत्ति नहीं मिलेगी।

यदि मैं कठोर मेहनत करूँ, तो मेरे 96% अंक आएँगे।

मैंने कठोर मेहनत की।

इसीलिए मुझे छात्रवृत्ति मिल गई।

(ख) निम्नलिखित ग्राफ़ लीजिए :



(i) क्या G सम्बद्ध है ? यदि नहीं, तो दिखाइए कि G अपने घटकों का असंयुक्त सम्मिलन है।

(ii) G में सबसे लम्बे पथ की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

(iii) G में सबसे लंबा चक्र बताइए।

(iv) क्या G द्विभाजित है ? पुष्टि कीजिए।

5

6. (क) जनक फलन विधि का प्रयोग करते हुए रैखिक समीकरण $x_1 + x_2 + x_3 = n$, जहाँ $1 \leq x_1 \leq 3$, $-1 \leq x_2 \leq 1$ और $x_3 \geq 3$, के पूर्णांक हलों की संख्या ज्ञात कीजिए । 6

(ख) दिखाइए कि 10 को अलग-अलग हिस्सों (पूर्णाकों) में विभाजित करने की संख्या 10 को विषम हिस्सों में विभाजित करने की संख्या के बराबर होती है । 4

7. (क) अंग्रेज़ी का शब्द जो बाएँ से दाएँ या दाएँ से बाएँ पढ़े जाने पर समान होता है, वह विलोमपद (palindrome) कहलाता है, उदाहरण के लिए ROTOR एक विलोमपद है । मान लीजिए a_n लंबाई n वाले अंग्रेज़ी शब्दों की संख्या है, जिनका अर्थ हो न हो, लेकिन वे विलोमपद हैं । हम एक ही अक्षर को भी विलोमपद मानते हैं ।

(i) a_1 और a_2 क्या हैं ?

(ii) a_n के लिए पुनरावृत्ति बनाइए ।

(iii) जाँच कीजिए कि

$$a_n = (\sqrt{26})^n \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{26}}{2} \right) + (-1)^n \left(\frac{1 - \sqrt{26}}{2} \right) \right\}$$

पुनरावृत्ति का हल है ।

(iv) a_n के लिए ऊपर वाले व्यंजक द्वारा a_3 ज्ञात कीजिए । 5

(ख) बहुपद $x^4 + x^2 + x$ को क्रमगुणित बहुपदों $[x]_4$, $[x]_3$ इत्यादि के पदों में व्यक्त कीजिए । 3

(ग) दिखाइए कि $K_{100, 101}$ हैमिल्टोनियन नहीं है । 2