No. of Printed Pages : 10

MTE-09

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

03517

June, 2016

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-09 : REAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Attempt **five** questions in all. Question no. **1** is **compulsory**. Answer any **four** questions out of questions no. **2** to **7**. Use of calculators is **not** allowed.*

1. Are the following statements *True* or *False* ? Give reasons for your answers. *5×2=10*

   (a) 0 is the supremum of the set $\{-n : n \text{ is a natural number}\}$.

   (b) A necessary condition for a function f to be integrable is that it is continuous.

(c) The greatest integer function [x] defined on $\mathbf{R}$ is derivable in the interval $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.

(d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cot x}{x - \frac{\pi}{2}}$ does not exist.

(e) The series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{e}{\pi}\right)^n$ is convergent.

2. (a) Using the Principle of Mathematical Induction, show that

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2, \forall\, n \in \mathbf{N}.$ *3*

(b) Show that the function $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ defined by

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{when } x \text{ is rational} \\ 2 & \text{when } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

is not Riemann integrable. *4*

(c) Show that the function

$f(x) = | x - 5 | + x^2 + 3x + 10$

is continuous but is not differentiable at the point $x = 5$. *3*

3. (a) Show that the sequence (f_n) where $f_n(x) = \frac{x}{1+2nx^2}$, $x \in [1, \infty[$ is uniformly convergent in $[1, \infty[$. 3

(b) Check whether the following sequences (s_n) are Cauchy, where 4

(i) $s_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

(ii) $s_n = \frac{4n^3 + 3n}{3n^3 + n^2}$

(c) Check whether the function $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ is uniformly continuous on the interval $]0, 1[$. Is it continuous on the same interval ? Justify. 3

4. (a) Show that the union of two open sets is an open set. 3

(b) Verify Inverse Function Theorem for finding the derivative at a point y_0 of the domain of the inverse function of the function $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$. Hence, find the derivative at y_0. 3

(c) Test for convergence the following series : 4

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{(3n+1)!}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\log n}}$

5. (a) Define a compact set. Check whether the set of integers is compact or not. 2

(b) If $a + b + c = -4$ and $4a + 2b + c = 6$, then show that both the roots of the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ are real. 4

(c) Using Taylor's Theorem, prove that

$$\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \quad \forall\, x \in \mathbf{R}.$$ 4

6. (a) State the second mean value theorem of integrability. Verify it for the functions f and g defined on [1, 2] by $f(x) = 3x$ and $g(x) = 5x$. 5

(b) Test the following series for absolute and conditional convergence : 5

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{3n+1}$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

7. (a) Prove that there is no rational number whose square is 6. *3*

(b) Check whether the following functions are continuous or not at $x = 0$. Also, find the nature of discontinuity at that point, if it exists. *4*

(i) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{x} & , \; x \neq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & , \; x = 0 \end{cases}$$

(ii) $$f(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{3} & , \; x \leq 0 \\ -(x^3 + \dfrac{1}{3}) & , \; x > 0 \end{cases}$$

(c) Examine the function f given by

$f(x) = (x - 8)^3 (x + 3), \; x \in \mathbf{R}$

for extreme values. *3*

एम.टी.ई.-09

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2016

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न सं. 1 **अनिवार्य** है । प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

1. क्या निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं अथवा *असत्य* ? अपने उत्तरों के कारण बताइए । *5×2=10*

   (क) 0 समुच्चय $\{-n : n$ एक प्राकृतिक संख्या है $\}$ का उच्चक है ।

   (ख) फलन f के समाकलनीय होने के लिए अनिवार्य प्रतिबंध है कि वह संतत हो ।

(ग) $\mathbf{R}$ पर परिभाषित महत्तम पूर्णांक फलन $[x]$, अन्तराल $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ में अवकलनीय है ।

(घ) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cot x}{x - \frac{\pi}{2}}$ का अस्तित्व नहीं होता ।

(ङ) श्रेणी $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$ अभिसारी है ।

2. (क) गणितीय आगमन नियम का प्रयोग करके, दिखाइए कि

$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2, \forall\, n \in \mathbf{N}.$ *3*

(ख) दिखाइए कि

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{जब } x \text{ परिमेय है} \\ 2 & \text{जब } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ रीमान समाकलनीय नहीं है । *4*

(ग) दिखाइए कि फलन

$f(x) = | x - 5 | + x^2 + 3x + 10$

संतत है लेकिन बिन्दु $x = 5$ पर अवकलनीय नहीं है । *3*

3. (क) दिखाइए कि अनुक्रम (f_n), $[1, \infty[$ में एकसमानतः अभिसारी है, जहाँ $f_n(x) = \dfrac{x}{1+2nx^2}$, $x \in [1, \infty[$. *3*

(ख) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित अनुक्रम (s_n) कॉशी हैं या नहीं, जहाँ *4*

(i) $s_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$

(ii) $s_n = \dfrac{4n^3 + 3n}{3n^3 + n^2}$

(ग) जाँच कीजिए कि फलन $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$, अन्तराल $]0, 1[$ पर एकसमानतः संतत है या नहीं । क्या यह इसी अन्तराल पर संतत है ? पुष्टि कीजिए । *3*

4. (क) दिखाइए कि दो विवृत समुच्चयों का सम्मिलन एक विवृत समुच्चय है । *3*

(ख) सत्यापित कीजिए कि फलन $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$ के प्रतिलोम फलन के प्रांत के बिन्दु y_0 पर, अवकलज ज्ञात करने के लिए क्या हम प्रतिलोम फलन प्रमेय का प्रयोग कर सकते हैं । अतएव, y_0 पर अवकलज ज्ञात कीजिए । *3*

(ग) निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण की जाँच कीजिए : *4*

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{(3n+1)!}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\log n}}$

5. (क) संहत समुच्चय को परिभाषित कीजिए । जाँच कीजिए कि पूर्णांकों का समुच्चय संहत होता है या नहीं । 2

(ख) यदि $a + b + c = -4$ और $4a + 2b + c = 6$, तब दिखाइए कि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के दोनों मूल वास्तविक हैं । 4

(ग) टेलर प्रमेय का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए कि

$$\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ \forall\, x \in \mathbf{R}.$$ 4

6. (क) समाकलनीयता के द्वितीय माध्य मान प्रमेय का कथन दीजिए । $f(x) = 3x$ और $g(x) = 5x$ द्वारा $[1, 2]$ पर परिभाषित फलनों f और g के लिए इसे सत्यापित कीजिए । 5

(ख) निरपेक्ष और सप्रतिबंध अभिसरण के लिए निम्नलिखित श्रेणियों की जाँच कीजिए : 5

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{3n+1}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$

7. (क) सिद्ध कीजिए कि कोई भी ऐसी परिमेय संख्या नहीं है जिसका वर्ग 6 हो । *3*

(ख) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित फलन $x = 0$ पर संतत हैं या नहीं । उन बिन्दुओं पर असांतत्य का अस्तित्व हो, तो उसका स्वरूप भी ज्ञात कीजिए । *4*

(i) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{x} & , x \neq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & , x = 0 \end{cases}$$

(ii) $$f(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{3} & , x \leq 0 \\ -(x^3 + \dfrac{1}{3}) & , x > 0 \end{cases}$$

(ग) चरम मानों के लिए $f(x) = (x - 8)^3 (x + 3), x \in \mathbf{R}$ द्वारा दिए गए फलन f की जाँच कीजिए । *3*