No. of Printed Pages : 8

MTE-08

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

04115 **Term-End Examination**

June, 2016

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-08 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 1 is* ***compulsory****. Attempt any* ***four*** *questions from the remaining questions no. 2 to 7. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

---

1. State whether the following statements are *True* or *False*. Justify your answer with the help of a short proof or a counter-example. No marks will be awarded without justification. *5×2=10*

(a) The solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = y \text{ with } y(0) = 0$$

exists, but is not unique.

(b) For the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x) = 0,$$

one integral included in the complementary function is e^{-x} if $1 + P(x) + Q(x) = 0$.

(c) The simultaneous differential equation of simple harmonic motion of a particle in phase-space is

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-\omega^2 x} = dt \text{ with } y(x_0) = y_0.$$

(d) The solution of the partial differential equation

$(D - 2D')(2D - D' + 1)(D^2 - D')\, z = 0$ is

$$z = f_1(y + 2x) + e^{-x} f_2(x + 2y) + \sum_{r=1}^{\infty} C_r\, e^{a_r x + b_r y},$$

with $a_r - b_r^2 = 0$.

(e) The Pfaffian equation

$(2xy^2 + 2xy + 2xz^2 + 1)\, dx + dy + 2z\, dz = 0$ is integrable.

2. (a) Find the solution of the one-dimensional wave equation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

satisfying the boundary conditions

$z(0, t) = 0 = z(a, t)$, where a is a constant. *6*

(b) Solve : 4

$$(D-1)^2 (D^2+1)^2 y = \sin^2 \frac{x}{2} + e^x$$

3. (a) A particle falls from rest in a medium in which the resistance is λv^2 per unit mass, v being the velocity of the particle at time t. Prove that the distance fallen in time t is $\frac{1}{\lambda} ln \cosh\left(t\sqrt{g\lambda}\right)$, where g is the acceleration due to gravity. 5

(b) Solve : 5

$$(y^2 + yz)\,dx + (z^2 + zx)\,dy + (y^2 - xy)\,dz = 0$$

4. (a) A quantity of a radioactive substance, originally weighing x_0 gms, decomposes at a rate proportional to amount present. If one-third of the original amount is left after 3 years, find the amount of the substance left after t years. 3

(b) Solve : 4

$$x^2y^2 (2y\,dx + x\,dy) - (5y\,dx + 7x\,dy) = 0$$

(c) Using Lagrange's method, solve the differential equation

$$p - qy\, ln\, y = z\, ln\, y.$$ 3

5. (a) Solve : 5

$$(D^2 + 5DD' + 5D'^2)\, z = x \sin (3x - 2y)$$

(b) Solve : 5

$$\frac{dx}{y^2 + yz + z^2} = \frac{dy}{z^2 + zx + x^2} = \frac{dz}{x^2 + xy + y^2}$$

6. (a) Using the method of variation of parameters, solve the equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = \sec ax. \qquad 4$$

(b) Solve $(p + q)(px + qy) = 1$, using Charpit's method. 4

(c) Solve : 2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y + 1}$$

7. (a) Solve : 3

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = ln\, x$$

(b) Solve : 3

$$p^2 - 2xyp + 4y^2 = 0, \text{ where } p = \frac{dy}{dx}$$

(c) Using $U = \frac{1}{2} x^2$ and $V = \frac{1}{2} y^2$, solve the partial differential equation

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{x^3} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{y^3} \frac{\partial z}{\partial y}. \qquad 4$$

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2016

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-08 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

---

*नोट: प्रश्न सं. 1 करना **अनिवार्य** है । शेष प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य* । संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रत्युदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । बिना पुष्टि के कोई अंक नहीं दिए जाएँगे । *5×2=10*

(क) अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = y,\ y(0) = 0$$

के हल का अस्तित्व है, परन्तु हल अद्वितीय नहीं है ।

(ख) अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x) = 0$$

के लिए यदि $1 + P(x) + Q(x) = 0$, तो पूरक फलन में शामिल एक समाकल e^{-x} होगा ।

(ग) प्रावस्था-समष्टि में कण की सरल आवर्त गति को परिभाषित करने वाले युगपत् अवकल समीकरण

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-\omega^2 x} = dt, \; y(x_0) = y_0 \text{ हैं ।}$$

(घ) आंशिक अवकल समीकरण

$(D - 2D')(2D - D' + 1)(D^2 - D')z = 0$ का हल

$$z = f_1(y + 2x) + e^{-x} f_2(x + 2y) + \sum_{r=1}^{\infty} C_r e^{a_r x + b_r y},$$

जहाँ $a_r - b_r^2 = 0$ है ।

(ङ) फैफियन अवकल समीकरण

$(2xy^2 + 2xy + 2xz^2 + 1)\,dx + dy + 2z\,dz = 0$
समाकलनीय है ।

2. (क) परिसीमा प्रतिबंधों $z(0, t) = 0 = z(a, t)$, जहाँ a एक अचर है, को संतुष्ट करने वाले एक-विमीय तरंग समीकरण

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

का हल ज्ञात कीजिए । 6

(ख) हल कीजिए : 4

$$(D-1)^2 (D^2+1)^2 y = \sin^2 \frac{x}{2} + e^x$$

3. (क) एक कण विरामावस्था से एक माध्यम, जिसमें प्रतिरोध λv^2 प्रति इकाई द्रव्यमान है, में नीचे गिरता है । v किसी भी समय t पर कण का वेग है । सिद्ध कीजिए कि कण द्वारा समय t में तय की गई दूरी $\frac{1}{\lambda} ln \cosh\left(t\sqrt{g\lambda}\right)$ है, जहाँ g गुरुत्वीय त्वरण है । 5

(ख) हल कीजिए : 5

$$(y^2 + yz)\,dx + (z^2 + zx)\,dy + (y^2 - xy)\,dz = 0$$

4. (क) एक रेडियोधर्मी पदार्थ जिसका मूल भार x_0 ग्राम है उस समय उपस्थित मात्रा के समानुपाती दर से अपघटित होता है । यदि 3 वर्षों बाद मूल मात्रा का एक-तिहाई पदार्थ शेष रह जाता है, तो t वर्षों के बाद पदार्थ की मात्रा ज्ञात कीजिए । 3

(ख) हल कीजिए : 4

$$x^2y^2 (2y\,dx + x\,dy) - (5y\,dx + 7x\,dy) = 0$$

(ग) लग्रांज विधि द्वारा अवकल समीकरण

$$p - qy\, ln\, y = z\, ln\, y$$

का हल प्राप्त कीजिए । 3

5. (क) हल कीजिए : 5

$$(D^2 + 5DD' + 5D'^2)\, z = x \sin (3x - 2y)$$

(ख) हल कीजिए : 5

$$\frac{dx}{y^2 + yz + z^2} = \frac{dy}{z^2 + zx + x^2} = \frac{dz}{x^2 + xy + y^2}$$

6. (क) प्राचल विचरण विधि द्वारा समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = \sec ax$$

का हल प्राप्त कीजिए । 4

(ख) चार्पिट विधि द्वारा समीकरण

$$(p + q)(px + qy) = 1$$

का हल प्राप्त कीजिए । 4

(ग) हल कीजिए : 2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y + 1}$$

7. (क) हल कीजिए : 3

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = ln\, x$$

(ख) हल कीजिए : 3

$$p^2 - 2xyp + 4y^2 = 0, \text{ जहाँ } p = \frac{dy}{dx}$$

(ग) $U = \frac{1}{2} x^2$ और $V = \frac{1}{2} y^2$ का प्रयोग करके आंशिक अवकल समीकरण

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{x^3} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{y^3} \frac{\partial z}{\partial y}$$

का हल प्राप्त कीजिए । 4