BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

05767

Term-End Examination

June, 2016

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Attempt* ***five*** *questions in all. Question no. 7 is* ***compulsory****. Answer any* ***four*** *questions from questions no. 1 to 6. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

---

1. (a) Define a relation R on the set of integers **Z** by $R = \{(n, n + 3k) \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Show that R is an equivalence relation. Also find all distinct equivalence classes. *4*

(b) Express the permutation

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$ first as

a product of disjoint cycles and then as a product of transpositions. What is the signature of f ? *3*

(c) Show that the polynomial

$3x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 10x + 20$

is irreducible over $\mathbf{Q}$. Is the polynomial $3x^2 + x + 4$ irreducible over $\mathbf{Z}_7$? Give reasons. 3

2. (a) Find the remainder of 37^{49} when divided by 7. 2

(b) Let S be the set of all real numbers except -1. Define an operation $\oplus$ on S by $x \oplus y = x + y + xy$; $x, y \in S$. Show that $< S, \oplus >$ is an abelian group. Find a solution of the equation $1 \oplus x = 2$ in S. 5

(c) Find the nil radical of $\mathbf{Z}_8$. 3

3. (a) Let $R = \mathbf{Z} + \sqrt{2}\,\mathbf{Z}$ and S = the ring of 2×2 matrices of the form $\left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{Z} \right\}$.

Show that $\theta : R \to S$ defined by $\theta(a + \sqrt{2}\,b) = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}$ is an isomorphism of rings. 4

(b) If G is a finite commutative group of order n and if a prime p divides n, show that the number of Sylow-p subgroups of G is one. Find the unique Sylow-3 and Sylow-2 subgroups of the cyclic group $\mathbf{Z}_{24}$. 4

(c) Is $I = \left\{ \begin{bmatrix} m & 0 \\ n & 0 \end{bmatrix} \middle| \, m, n \in \mathbf{Z} \right\}$ an ideal of the ring $R = \left\{ \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} \middle| \, k, l, m, n \in \mathbf{Z} \right\}$ of 2×2 matrices over integers ? Justify your answer. 2

4. (a) Prove by the principle of mathematical induction that $2^n \cdot 3^{2n} - 1$ is divisible by 17 for all positive integers n. 3

(b) Show that $\dfrac{\mathbf{R}[x]}{< x^2 + 1 >} \cong \mathbf{C}$ as fields. 5

(c) If H is a normal subgroup of a finite G, prove or disprove : $|G/H| = 2$. 2

5. (a) Prove that $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ is not a U.F.D. by giving (with justification) two different factorizations of 4 as product of irreducible elements in $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$. 4

(b) Prove that any infinite cyclic group is isomorphic to the group of integers under addition. 3

(c) Let R and S be commutative rings and $f : R \to S$ be a ring homomorphism. Show that the inverse image of a prime ideal in S is a prime ideal in R. 3

6. (a) Find all the elements of the ring $\mathbf{Z}_{10}$ which have a multiplicative inverse. Also give their inverses. *3*

(b) Show that $H = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\}$ is a subgroup of S_n. Further show that $H \simeq S_{n-1}$. *4*

(c) Prove that if I is a non-zero ideal of a field F, then I = F. *3*

7. Which of the following statements are *true* and which are *false* ? Give reasons for your answers. *10*

(a) Characteristic of a finite field is zero.

(b) $\mathbf{Z}_{12}$ is a field.

(c) In a ring with unity the sum of any two units is a unit.

(d) Every element of S_n has order at most n.

(e) There is no non-trivial group homomorphism from a group of order 5 to a group of order 6.

एम.टी.ई.-06

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2016

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-06 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

*नोट : कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए । प्रश्न सं. 7 करना **अनिवार्य** है । प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

1. (क) $R = \{(n, n + 3k) \mid k \in \mathbf{Z}\}$ द्वारा पूर्णांकों के समुच्चय $\mathbf{Z}$ पर सम्बन्ध R को परिभाषित कीजिए । दिखाइए कि R एक तुल्यता सम्बन्ध है । सभी अलग-अलग तुल्यता वर्ग भी ज्ञात कीजिए । *4*

(ख) क्रमचय $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ को पहले असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में और उसके बाद पक्षांतरणों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए । f का चिह्नक क्या है ? *3*

(ग) दिखाइए कि बहुपद $3x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 10x + 20$, $\mathbf{Q}$ में अखंडनीय है । क्या बहुपद $3x^2 + x + 4$, $\mathbf{Z}_7$ पर अखंडनीय है ? कारण बताइए । 3

2. (क) 37^{49} को 7 से विभाजित किए जाने पर प्राप्त शेषफल क्या होगा, ज्ञात कीजिए । 2

(ख) मान लीजिए S सिवाय -1 के सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है । $x \oplus y = x + y + xy$; $x, y \in S$ द्वारा S पर संक्रिया $\oplus$ परिभाषित कीजिए । दिखाइए कि $< S, \oplus >$ एक आबेली समूह है । S में समीकरण $1 \oplus x = 2$ का हल ज्ञात कीजिए । 5

(ग) $\mathbf{Z}_8$ का शून्य करणी ज्ञात कीजिए । 3

3. (क) मान लीजिए $R = \mathbf{Z} + \sqrt{2}\ \mathbf{Z}$ और S = रूप $\left\{\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbf{Z}\right\}$ के 2×2 आव्यूहों का वलय है । दिखाइए कि $\theta(a + \sqrt{2}\,b) = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}$ द्वारा परिभाषित $\theta : R \to S$ वलयों की तुल्याकारिता है । 4

(ख) यदि G कोटि n वाला परिमित क्रमविनिमेय समूह है और यदि p, एक अभाज्य संख्या है, जो n को विभाजित करती है, तो दिखाइए कि G के सीलो-p उपसमूहों की संख्या एक है । चक्रीय समूह $\mathbf{Z}_{24}$ के अद्वितीय सीलो-2 और सीलो-3 उपसमूह ज्ञात कीजिए । 4

(ग) क्या $I = \left\{ \begin{bmatrix} m & 0 \\ n & 0 \end{bmatrix} \middle| \, m, n \in \mathbf{Z} \right\}$ पूर्णांकों पर 2 × 2 आव्यूहों के वलय $R = \left\{ \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} \middle| \, k, l, m, n \in \mathbf{Z} \right\}$ की गुणजावली है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 2

4. (क) गणितीय आगमन नियम से सिद्ध कीजिए कि $2^n \cdot 3^{2n} - 1$, सभी धनात्मक पूर्णांकों n के लिए 17 से विभाजित होता है । 3

(ख) दिखाइए कि $\dfrac{\mathbf{R}[x]}{< x^2 + 1 >}$ और C तुल्याकारी क्षेत्र हैं । 5

(ग) यदि H परिमित G का एक प्रसामान्य उपसमूह है, तब सिद्ध या असिद्ध कीजिए कि $|G/H| = 2$. 2

5. (क) पुष्टि सहित $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ में अखंडनीय अवयवों के गुणनफल के रूप में 4 के दो अलग-अलग गुणनखंडन देते हुए सिद्ध कीजिए कि $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ यू.एफ.डी. नहीं है । 4

(ख) सिद्ध कीजिए कि कोई भी अपरिमित चक्रीय समूह योग के अधीन पूर्णांक समूहों के तुल्याकारी है । 3

(ग) मान लीजिए R और S क्रमविनिमेय वलय हैं और $f : R \to S$ एक वलय समाकारिता है । दिखाइए कि S में अभाज्य गुणजावली का प्रतिलोम प्रतिबिंब R में एक अभाज्य गुणजावली है । 3

6. (क) वलय $\mathbf{Z}_{10}$ के सभी अवयव ज्ञात कीजिए जिनके गुणनात्मक व्युत्क्रम हों । उनके व्युत्क्रम भी बताइए । *3*

(ख) दिखाइए कि $H = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\}$, S_n का एक उपसमूह है । इसके आगे दिखाइए कि $H \simeq S_{n-1}$. *4*

(ग) सिद्ध कीजिए कि यदि I, क्षेत्र F की एक शून्येतर गुणजावली है, तब $I = F$. *3*

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन *सत्य* हैं और कौन-से *असत्य* । अपने उत्तरों के कारण बताइए । *10*

(क) परिमित क्षेत्र का अभिलक्षणिक शून्य है ।

(ख) $\mathbf{Z}_{12}$ एक क्षेत्र है ।

(ग) तत्समकी वलय में किन्हीं दो इकाइयों का योगफल एक इकाई होता है ।

(घ) S_n के प्रत्येक अवयव की कोटि अधिकतम n होती है ।

(ङ) कोटि 5 के समूह से कोटि 6 के समूह की कोई भी अतुच्छ समूह समाकारिता नहीं होती ।