

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

00106

Term-End Examination**June, 2016****ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-03 : MATHEMATICAL METHODS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50**(Weightage 70%)*

Note : Question no. 7 is compulsory. Attempt any four questions from questions no. 1 to 6. Use of calculators is not allowed.

1. (a) Integrate : 3

$$\int x^5 e^{x^2} dx$$

(b) The probability density function of the random variable X is

$$f(x) = \frac{x}{2}, 0 < x < 2$$

$$= 0, \text{ elsewhere.}$$
Find $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{4}\right)$ and $\text{Var}(X)$. 3

- (c) Calculate the correlation coefficient between x and y for the data given below :

4

x	y
-4	-3
1	8
3	15
-1	0
0	-5
5	10
-2	-15
-3	-2
-1	1
2	11

2. (a) Calculate mode, Q_1 , Q_2 , Q_3 and Quartile deviation for the following data :

5

<i>Marks</i>	<i>No. of Students</i>
0 - 10	6
10 - 20	5
20 - 30	8
30 - 40	15
40 - 50	7
50 - 60	6
60 - 70	3

- (b) Suppose a protein of mass m disintegrates into amino acids according to the formula $m = \frac{28}{t+2}$, where t indicates time. Find the average rate of reaction in the time interval $t = 0$ to $t = 2$. 3
- (c) Find the term free of x in the Binomial expansion of $\left(4x - \frac{5}{x^2}\right)^6$. 2
3. (a) If $u = \sin^{-1} \frac{x^2 + y^2}{x + y}$, show that $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$. 3
- (b) In a sample of 5 measurements, the diameter of a circle was recorded as 5.37, 5.33, 5.34, 5.37 and 5.34 cm. Determine 5
- (i) unbiased estimate of the population mean
- (ii) an estimate of the population S.D.
- (iii) sample S.D.
- (c) If $\alpha = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\beta = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\gamma = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, find $\alpha \times \beta$ in terms of γ . 2

4. (a) Ten soldiers visit a rifle range for two consecutive weeks. For the first week their scores are :

67, 24, 57, 55, 63, 54, 56, 68, 33, 43

and during the second week their scores in the same order are :

70, 38, 58, 58, 56, 67, 68, 72, 42, 38.

Examine if there is any significant difference in their performance at 5% level of significance.

5

[The following values of t may be useful :
 $t_{9, 0.05} = 2.262$, $t_{9, 0.1} = 1.833$, $t_{10, 0.05} = 2.228$,
 $t_{10, 0.1} = 1.812$]

- (b) If $y = \cos \frac{x}{2}$, then show that

$$4 \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = 0. \quad 2$$

- (c) Find the equation of the line which passes through the point (3, -1, 11) and is perpendicular to the line $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$.

3

5. (a) Let $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ be defined by $f(x) = x^2 + x + 1$.
Is f bijective? 3

(b) Let X be a random variable with p.d.f.
 $f(x) = ke^{-\theta x}$, $\theta > 0$, $x \geq 0$. Find 3

(i) the constant k

(ii) CDF of X

(iii) standard deviation of X .

(c) Find the asymptotes of the following curve 4
 $y^2(x-1) - x^3 = 0$.

6. (a) The sum of three numbers in A.P. is 24. If
the first is decreased by 1 and the second by
2, the numbers form a G.P. Find the
numbers. 3

(b) Solve : 3
$$\cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x = 1$$

(c) The probabilities of X , Y and Z becoming
managers are $\frac{4}{9}$, $\frac{2}{9}$ and $\frac{1}{3}$, respectively.

The probability that bonus scheme will be
introduced if X , Y and Z become managers
are $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{2}$ and $\frac{4}{5}$, respectively. What is the
probability that bonus scheme will be
introduced? Who is the most likely manager
to introduce the bonus scheme? 4

7. State whether the following statements are *true* or *false*. Justify your answer with the help of a short proof or a counter-example. 5×2=10

(i) If $B \subset A$, then $P(A \cap \bar{B}) = P(A) + P(B)$.

(ii) $\frac{x^3 - 1}{x - 1}$ is not a polynomial.

(iii) $\int_0^a f(a - x) dx = \int_0^a f(x) dx$.

(iv) The rule given below is a function
 $f: \{2, 3\} \rightarrow \{4, 7\} : f(2) = 4, f(2) = 7, f(3) = 7$.

(v) Probability of committing a type-II error is called the level of significance.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2016

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-03 : गणितीय विधियाँ

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50
(कुल का 70%)

नोट : प्रश्न सं. 7 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) समाकलित कीजिए :

3

$$\int x^5 e^{x^2} dx$$

(ख) यादृच्छिक चर X का प्रायिकता घनत्व फलन

$$f(x) = \frac{x}{2}, 0 < x < 2$$

$$= 0, \text{ अन्यथा}$$

है। $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{4}\right)$ और $\text{Var}(X)$ ज्ञात कीजिए। 3

(ग) नीचे दिए गए आँकड़ों के लिए x और y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए :

4

x	y
-4	-3
1	8
3	15
-1	0
0	-5
5	10
-2	-15
-3	-2
-1	1
2	11

2. (क) निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक, Q_1 , Q_2 , Q_3 और चतुर्थक विचलन परिकलित कीजिए :

5

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0 - 10	6
10 - 20	5
20 - 30	8
30 - 40	15
40 - 50	7
50 - 60	6
60 - 70	3

(ख) मान लीजिए प्रोटीन का द्रव्यमान m सूत्र $m = \frac{28}{t+2}$ के अनुसार ऐमीनो अम्लों में विभक्त होता है, जहाँ t समय को सूचित करता है। समय अंतराल $t = 0$ से $t = 2$ में औसत प्रतिक्रिया दर ज्ञात कीजिए। 3

(ग) $\left(4x - \frac{5}{x^2}\right)^6$ के द्विपद प्रसार में वह पद ज्ञात कीजिए जो x से मुक्त हो। 2

3. (क) यदि $u = \sin^{-1} \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ हो, तो दिखाइए कि $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$. 3

(ख) 5 मापों के एक प्रतिदर्श में, एक वृत्त के व्यास 5.37, 5.33, 5.34, 5.37 और 5.34 cm रिकॉर्ड किए गए। निम्नलिखित ज्ञात कीजिए : 5

- (i) समष्टि माध्य का अनभिनत आकल
- (ii) समष्टि मानक विचलन का आकल
- (iii) प्रतिदर्श मानक विचलन।

(ग) यदि $\alpha = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\beta = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\gamma = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, तो $\alpha \times \beta$ को γ के पदों में ज्ञात कीजिए। 2

4. (क) दस सैनिक निरंतर दो सप्ताह राइफल रेंज में जाते हैं। उनके पहले सप्ताह के अंक हैं :

67, 24, 57, 55, 63, 54, 56, 68, 33, 43

और उनके दूसरे सप्ताह के अंक इसी क्रम में हैं :
70, 38, 58, 58, 56, 67, 68, 72, 42, 38.

जाँच कीजिए कि 5% के सार्थकता स्तर पर क्या उनके निष्पादन के अंतर सार्थक हैं।

5

[t के निम्नलिखित मान आपके लिए उपयोगी हो सकते हैं : $t_{9, 0.05} = 2.262$, $t_{9, 0.1} = 1.833$,
 $t_{10, 0.05} = 2.228$, $t_{10, 0.1} = 1.812$]

- (ख) यदि $y = \cos \frac{x}{2}$, तब दिखाइए कि

$$4 \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = 0.$$

2

- (ग) उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (3, -1, 11) से गुजरती है और रेखा $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ पर लंब है।

3

5. (क) मान लीजिए $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, $f(x) = x^2 + x + 1$ द्वारा परिभाषित है। क्या f एकैकी आच्छादी है ? 3

(ख) मान लीजिए यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन फलन $f(x) = ke^{-\theta x}$, $\theta > 0$, $x \geq 0$ है। निम्नलिखित ज्ञात कीजिए : 3

(i) अचर k

(ii) X का संचयी बंटन फलन

(iii) X का मानक विचलन।

(ग) निम्नलिखित वक्र

$$y^2(x-1) - x^3 = 0$$

के अनंतस्पर्शी ज्ञात कीजिए। 4

6. (क) समांतर श्रेणी में तीन संख्याओं का योगफल 24 है। यदि पहली संख्या में से 1 कम कर दिया जाए और दूसरी में से 2 कम कर दिए जाएँ, तो संख्याएँ गुणोत्तर श्रेणी बन जाती हैं। संख्याएँ ज्ञात कीजिए। 3

(ख) हल कीजिए : 3

$$\cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x = 1$$

(ग) X , Y और Z के प्रबंधक बनने की प्रायिकताएँ क्रमशः

$\frac{4}{9}$, $\frac{2}{9}$ और $\frac{1}{3}$ हैं। यदि X , Y और Z प्रबंधक बन

जाते हैं, तो बोनस योजना शुरू किए जाने की प्रायिकता

क्रमशः $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{2}$ और $\frac{4}{5}$ है। इसकी क्या प्रायिकता है

कि बोनस योजना शुरू की जाएगी ? प्रायिकतम कौन-सा

प्रबंधक बोनस योजना शुरू करेगा ? 4

7. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रत्युदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

5×2=10

(i) यदि $B \subset A$, तो $P(A \cap \bar{B}) = P(A) + P(B)$.

(ii) $\frac{x^3 - 1}{x - 1}$ बहुपद नहीं है।

(iii) $\int_0^a f(a - x) dx = \int_0^a f(x) dx$.

(iv) नीचे दिया गया नियम

$$f: \{2, 3\} \rightarrow \{4, 7\} : f(2) = 4, f(2) = 7, f(3) = 7$$

एक फलन है।

(v) प्रकार-II की त्रुटि करने की प्रायिकता सार्थकता स्तर कहलाती है।