No. of Printed Pages : 8

MTE-02

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

01206

June, 2016

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 hours | *Maximum Marks : 50*

(Weightage 70%)

Note : *Question no. 7 is **compulsory**. Attempt any **four** questions from Questions no. 1 to 6. Use of calculators is **not** allowed.*

---

1. (a) Let $\alpha_1 = (1, 0, -1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 1)$ and $\alpha_3 = (0, -3, 2)$ be vectors in $\mathbf{R}^3$. Show that $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ is a basis for $\mathbf{R}^3$. Express $(1, 0, 0)$ and $(1, 1, 0)$ as linear combinations of α_1, α_2 and α_3. *4*

(b) Let $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ be defined by

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3, -2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

(i) Write the matrix of T with respect to the standard basis of $\mathbf{R}^3$.

(ii) Show that T^{-1} exists. Give the expression for $T^{-1}(x_1, x_2, x_3)$ for T above. *6*

2. (a) Let $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$ be defined by $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$ and $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ be defined by $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$. Suppose $g = f \circ T$. What is $g(2, 3)$? *3*

(b) Let $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(i) Find one value each of a and b such that rank of A is 3. Justify your answer.

(ii) Find one value each for a and b such that rank of A is 2. Justify your answer. *3*

(c) Find the minimal polynomial of the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$ *4*

3. (a) Find the eigenvalues and eigenvectors of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$ *5*

(b) Solve the following system of equations by Gauss elimination method : *5*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 - x_2 - x_3 = 2$$
$$x_1 - 2x_2 = 0.$$

4. (a) Show that $A^{-1} = A^3$, if A is the matrix $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 5

(b) Let $\beta_1 = (1, 0, 1)$, $\beta_2 = (1, 0, -1)$ and $\beta_3 = (0, 3, 4)$ be vectors in $\mathbf{R}^3$. Apply the Gram-Schmidt process to $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ to obtain an orthonormal basis for $\mathbf{R}^3$. 5

5. (a) Suppose in the standard basis for $\mathbf{R}^3$, the matrix of $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ is $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Find the matrix of T with respect to the ordered basis $\{V_1 = (1, 1, 1), V_2 = (0, 1, 1), V_3 = (0, 0, 1)\}$. 4

(b) Find the orthogonal canonical reduction of the form $x^2 - 2y^2 + z^2 + 2xy + 6yz$ and its principal axis. 6

6. (a) Find the range space and a basis for the kernel of the linear transformation $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ defined by

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, x_4 - x_1).$$

6

(b) Are there values of $a \in \mathbf{C}$ for which the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & a \end{bmatrix}$ is unitary ? Justify your answer. *4*

7. Which of the following statements are *true* and which are *false* ? Justify your answer. *5×2=10*

(a) If $V = \{A \mid A \text{ is a } 2 \times 2 \text{ real matrix}\}$, then $V_1 = \{A \in V \mid A \text{ is invertible}\}$ is a subspace of V.

(b) The function defined by $x * y = \log(xy)$ is a binary operation on S, where $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$.

(c) The kernel of the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ is zero.

(d) If the determinant of a matrix is zero, the matrix is not diagonalisable.

(e) There is no co-ordinate transformation that transforms the quadratic form $x^2 + y^2 + z^2$ to $xz + yz$.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2016

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का 70%)

***नोट :** प्रश्न सं. 7 करना ज़रूरी है । प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।*

---

1. (क) मान लीजिए $\alpha_1 = (1, 0, -1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 1)$ और $\alpha_3 = (0, -3, 2)$, $\mathbf{R}^3$ में सदिश हैं । दिखाइए कि $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ $\mathbf{R}^3$ का आधार है । α_1, α_2 और α_3 के एकघात संचय में (1, 0, 0) और (1, 1, 0) को व्यक्त कीजिए । *4*

(ख) मान लीजिए $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3, -2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

द्वारा परिभाषित है ।

(i) $\mathbf{R}^3$ के मानक आधार के सापेक्ष T का आव्यूह लिखिए ।

(ii) दिखाइए कि T^{-1} का अस्तित्व है । ऊपर (i) में दिए गए T के लिए $T^{-1}(x_1, x_2, x_3)$ का व्यंजक दीजिए । *6*

2. (क) मान लीजिए $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$, $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$ द्वारा परिभाषित है और $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$ द्वारा परिभाषित है । मान लीजिए $g = f \circ T$. तब $g\,(2, 3)$ क्या है ? *3*

(ख) मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(i) a और b के लिए एक-एक मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए A की जाति 3 हो । अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए ।

(ii) a और b के लिए एक-एक मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए A की जाति 2 हो । अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *3*

(ग) आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ का अल्पिष्ठ बहुपद ज्ञात कीजिए । *4*

3. (क) आव्यूह $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ के आइगेनमान और आइगेनसदिश ज्ञात कीजिए । *5*

(ख) निम्नलिखित समीकरण निकाय :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 - x_2 - x_3 = 2$$
$$x_1 - 2x_2 = 0$$

को गाउसीय निराकरण विधि से हल कीजिए । *5*

4. (क) यदि A आव्यूह $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ है, तब दिखाइए कि

$A^{-1} = A^3$. 5

(ख) मान लीजिए $\beta_1 = (1, 0, 1)$, $\beta_2 = (1, 0, -1)$ और $\beta_3 = (0, 3, 4)$ $\mathbf{R}^3$ में सदिश हैं । $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ पर ग्राम-श्मिट प्रक्रम लागू करके $\mathbf{R}^3$ का एक प्रसामान्य लांबिक आधार प्राप्त कीजिए । 5

5. (क) मान लीजिए $\mathbf{R}^3$ के लिए मानक आधार के सापेक्ष

$T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ का आव्यूह $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ है ।

क्रमित आधार $\{V_1 = (1, 1, 1), V_2 = (0, 1, 1), V_3 = (0, 0, 1)\}$ के सापेक्ष T का आव्यूह ज्ञात कीजिए । 4

(ख) समघात $x^2 - 2y^2 + z^2 + 2xy + 6yz$ का लांबिक विहित समानयन और उसका मुख्य अक्ष ज्ञात कीजिए । 6

6. (क) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, x_4 - x_1)$

द्वारा परिभाषित रैखिक रूपांतरण $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ की अष्टि का आधार और परिसर समष्टि ज्ञात कीजिए । 6

(ख) क्या ऐसे $a \in \mathbf{C}$ के मान होते हैं जिनके लिए आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & a \end{bmatrix}$$

ऐकिक है । अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 4

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन *सत्य* हैं और कौन-से *असत्य* ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *5×2=10*

(क) यदि $V = \{A \mid A$ एक 2×2 वास्तविक आव्यूह$\}$ हो, तब $V_1 = \{A \in V \mid A$ व्युत्क्रमणीय है$\}$ V की उपसमष्टि है ।

(ख) $x * y = \log(xy)$ द्वारा परिभाषित फलन S पर द्विआधारी संक्रिया है, जहाँ $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$.

(ग) आव्यूह $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ की अष्टि शून्य है ।

(घ) यदि एक आव्यूह का सारणिक शून्य है, तब आव्यूह विकर्णनीय नहीं है ।

(ङ) ऐसा कोई निर्देशांक रूपांतरण नहीं है जो द्विघाती समघात $x^2 + y^2 + z^2$ को $xz + yz$ में रूपांतरित करता है ।
