

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)

Term-End Examination

03646

June, 2016

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-01 : CALCULUS

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage 70%)

Note : Question no. 1 is compulsory. Attempt any four questions from Q. No. 2 to Q. No. 7. Use of calculators is not allowed.

1. State whether the following statements are true or false. Justify your answers with the help of a short proof or a counter-example. 10
- (a) If the function f is not defined at $x = c$, then the limit of $f(x)$ as x approaches c does not exist.
- (b) If $f'(c) > 0$, then $f(x)$ is concave upward at $x = c$.

(c) The value of $\int_a^b x \, dx$ is $\frac{b^2 - a^2}{2}$.

(d) The mean value theorem can be applied to $f(x) = \frac{1}{x}$ on the interval $[-1, 1]$.

(e) The function f defined by

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 7$ is always decreasing.

2. Trace the curve $(x^2 + y^2)x = ay^2$, $a > 0$, stating all the properties used in the process. 10

3. (a) If $y = e^{m \sin^{-1} x}$, then show that $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = m^2y$. Hence using Leibnitz formula prove that $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1} - (n^2 + m^2)y_n = 0$.

4

(b) Check whether the following function is even or odd or neither :

2

$$f(x) = x^3 - x \cos x$$

(c) Evaluate :

4

$$\int_0^1 x^2 e^{3x} \, dx$$

4. (a) Using Simpson's rule, evaluate $\int_0^8 \frac{x}{1+x^2} dx$ dividing $[0, 8]$ into 4 equal intervals. 3

- (b) Determine the interval on which the given function is continuous

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases} \quad 3$$

- (c) Prove that : 4

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = \left(-\frac{\pi}{2}\right) \ln 2$$

5. (a) Integrate

$$\int (\sqrt{\tan x} - \sqrt{\cot x}) \, dx. \quad 4$$

- (b) Suppose the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ($a > b$) is revolved about the major axis. Find the volume of the solid generated. 4

- (c) Find the domain of the function f defined by

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x - x^2 - 6}}. \quad 2$$

6. (a) Find the area of a loop of the curve $r = a \sin 3\theta$. 4

(b) Evaluate : 3

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - 3}{\sqrt{2x - 4} - \sqrt{2}}$$

(c) Differentiate $\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$ with respect to

$$\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}. \quad 3$$

7. (a) If $u_n = \int \frac{\sin nx}{\sin x} dx$, $n \geq 2$, prove that

$$u_n = \frac{2 \sin (n-1)x}{n-1} + u_{n-2}. \text{ Hence evaluate}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 5x}{\sin x} dx. \quad 4$$

(b) Find the maximum and minimum values for the function f defined by

$$f(x) = 2 \sin x + \cos 2x \text{ in the interval } [0, \pi/2]. \quad 3$$

(c) Show that $\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}$, $\forall x > 0$. 3

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2016

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-01 : कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का 70%)

नोट: प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रत्युदाहरण की सहायता से अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए।

10

(क) यदि फलन f , $x = c$ पर परिभाषित नहीं है, तो x के c की ओर अभिगम करने पर $f(x)$ की सीमांत का अस्तित्व नहीं है।

(ख) यदि $f'(c) > 0$, तो $x = c$ पर $f(x)$ ऊपर की ओर अवतल होगा।

(ग) $\int_a^b x \, dx$ का मान $\frac{b^2 - a^2}{2}$ है ।

(घ) अन्तराल $[-1, 1]$ में $f(x) = \frac{1}{x}$ पर माध्य मान प्रमेय का प्रयोग हो सकता है ।

(ङ) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 7$ द्वारा परिभाषित फलन f हमेशा हासमान होता है ।

2. वक्र $(x^2 + y^2) x = ay^2$, $a > 0$ का अनुरेखण कीजिए । इसका अनुरेखण करने के लिए आपने जिन गुणों का प्रयोग किया है, उन्हें स्पष्ट रूप से बताइए ।

10

3. (क) यदि $y = e^{m \sin^{-1} x}$, तो दर्शाइए कि

$(1 - x^2) y_2 - xy_1 = m^2 y$. अतः लाइबनिट्ज़ सूत्र का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि

$$(1 - x^2) y_{n+2} - (2n + 1) x y_{n+1} - (n^2 + m^2) y_n = 0.$$

4

(ख) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित फलन सम या विषम या दोनों में से कुछ भी नहीं है :

2

$$f(x) = x^3 - x \cos x$$

(ग) मूल्यांकन कीजिए :

4

$$\int_0^1 x^2 e^{3x} \, dx$$

4. (क) अन्तराल $[0, 8]$ को 4 बराबर अन्तरालों में विभाजित करके सिम्पसन नियम द्वारा $\int_0^8 \frac{x}{1+x^2} dx$ का मूल्यांकन कीजिए । 3

- (ख) वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिस पर निम्नलिखित फलन संतत है :

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0 & \text{यदि } x = 0 \end{cases} \quad 3$$

- (ग) सिद्ध कीजिए कि : 4

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = \left(-\frac{\pi}{2}\right) \ln 2$$

5. (क) $\int (\sqrt{\tan x} - \sqrt{\cot x}) dx$ का समाकलन कीजिए । 4

- (ख) मान लीजिए कि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ($a > b$) को दीर्घ अक्ष के प्रति परिक्रमण कराया गया है । इस तरह जनित घनाकृति का आयतन ज्ञात कीजिए । 4

- (ग) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x - x^2 - 6}}$ द्वारा परिभाषित फलन f का

प्रांत ज्ञात कीजिए । 2

6. (क) वक्र $r = a \sin 3\theta$ के एक पाश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 4

(ख) मूल्यांकन कीजिए : 3

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - 3}{\sqrt{2x - 4} - \sqrt{2}}$$

(ग) $\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$ का $\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}$ के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए। 3

7. (क) यदि $u_n = \int \frac{\sin nx}{\sin x} dx$, $n \geq 2$, तो सिद्ध कीजिए

कि $u_n = \frac{2 \sin(n-1)x}{n-1} + u_{n-2}$. इस प्रकार

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 5x}{\sin x} dx \text{ का मूल्यांकन कीजिए।} \quad 4$$

(ख) $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x$ द्वारा परिभाषित फलन f के, अन्तराल $[0, \pi/2]$ में, अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। 3

(ग) दर्शाइए कि $\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}$, $\forall x > 0$. 3