No. of Printed Pages : 8

PHE-14

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

00031

June, 2014

PHYSICS

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-III

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt **all** questions. The marks for each question are indicated against it. Symbols have their usual meanings.*

---

1. Attempt any ***five*** parts : *2×5=10*

(a) Show that the 2 × 2 matrix $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ is both Hermitian and unitary.

(b) Locate and name the singularities of the following function :

$$f(z) = \frac{\sin \frac{1}{z}}{(z-i)^2}$$

(c) Determine the Laplace transform of $e^{-at} \sin pt$, for $p \neq 0, \ s > 0$.

(d) Show that the cross product of two vectors, $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{C}$ can be expressed as $A_i = \varepsilon_{ijk} B_j C_k$, where ε_{ijk} is an anti-symmetric tensor of rank 3.

(e) Show that set $\{1, \omega, \omega^2\}$ forms a cyclic group of order 3 under multiplication, where ω is the imaginary cube root of unity.

(f) Calculate the residue of the function $f(z) = \dfrac{ze^z}{z^2 + a^2}$.

(g) Evaluate the following integral :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, x \, H_n(x) \, dx$$

given that $H_1(x) = 2x$.

2. Attempt any ***two*** parts : *5×2=10*

(a) Show that the eigenvalues of a Hermitian matrix are real and that distinct eigenvectors belonging to distinct eigenvalues are orthogonal.

(b) For the quadratic equation $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4$, write down the matrix of coefficients and diagonalize it. Recast the equation in new variables and identify the conic section.

(c) Obtain the eigenvalues and eigenvectors of the following matrix :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Attempt any ***one*** part : *10*

(a) Evaluate the following contour integral :

$$\oint_C z^2 e^{a/z} \, dz$$

where C is a unit circle about z = 0.

(b) Evaluate the following integral :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} \, dx$$

4. Attempt any ***one*** part : *10*

(a) Obtain the Fourier transform of the function e^{-ax^2}.

(b) Using the Laplace transform method, solve the following initial value problem :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_o^2 \, y = F_o \sin \omega t, \; \omega \neq \omega_o$$

and $y = 0, \; \frac{dy}{dt} = 0$ at $t = 0$.

5. Attempt any ***one*** part : *10*

(a) Using the following representation :

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

show that

$$J_1(x) + J_3(x) = \frac{4}{x} J_2(x)$$

(b) Using the generating function for Legendre polynomials :

$$g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$$

show that

$$2x P_n'(x) + P_n(x) = P_{n+1}'(x) + P_{n-1}'(x)$$

विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2014

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : ***सभी*** *प्रश्न कीजिए । प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।*

1. कोई ***पाँच*** भाग कीजिए : *2×5=10*

(क) सिद्ध कीजिए कि 2×2 आव्यूह $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ हर्मिटी भी है और ऐकिक भी ।

(ख) निम्नलिखित फलन की विचित्रताओं का निर्धारण कीजिए और उनके नाम बताइए :

$$f(z) = \frac{\sin \frac{1}{z}}{(z-i)^2}$$

(ग) $p \neq 0,\ s > 0$ के लिए $e^{-at} \sin pt$ का लाप्लास रूपान्तर प्राप्त कीजिए ।

(घ) दिखाइए कि दो सदिशों के सदिश गुणनफल $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{C}$ को $A_i = \varepsilon_{ijk} B_j C_k$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ ε_{ijk} कोटि 3 का प्रतिसममित टेन्सर है ।

(ङ) दिखाइए कि समुच्चय $\{1, \omega, \omega^2\}$ गुणन के अधीन कोटि 3 वाला एक चक्रीय समूह है, जहाँ ω, 1 का अधिकल्पित घनमूल है ।

(च) फलन $f(z) = \dfrac{ze^z}{z^2 + a^2}$ का अवशिष्ट परिकलित कीजिए ।

(छ) निम्नलिखित समाकल का मान परिकलित कीजिए :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, x\, H_n(x)\, dx$$

यदि दिया गया हो कि $H_1(x) = 2x$ है ।

2. कोई ***दो*** भाग कीजिए : *5×2=10*

(क) सिद्ध कीजिए कि एक हर्मिटी आव्यूह के आइगेनमान वास्तविक होते हैं और उसके भिन्न आइगेनमानों के संगत आइगेनसदिश एक-दूसरे पर लांबिक होते हैं ।

(ख) द्विघात समीकरण $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4$ के गुणांकों का आव्यूह लिखिए और उसका विकर्णन कीजिए । इसे नए चरों में प्रस्तुत कीजिए और बताइए कि यह किस शंकु परिच्छेद को निरूपित करता है ।

(ग) निम्नलिखित आव्यूह के आइगेनमान और आइगेनसदिश परिकलित कीजिए :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. कोई ***एक*** भाग कीजिए : *10*

(क) निम्नलिखित कन्टूर समाकल को हल कीजिए :

$$\oint_C z^2 e^{a/z} \, dz$$

जहाँ C एक एकक वृत्त है जिसका केन्द्र $z = 0$ पर है ।

(ख) निम्नलिखित समाकल का मान प्राप्त कीजिए :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} \, dx$$

4. कोई ***एक*** भाग कीजिए : *10*

(क) फलन e^{-ax^2} का फूरिये रूपांतर प्राप्त कीजिए ।

(ख) लाप्लास रूपांतरण विधि का उपयोग करते हुए निम्नलिखित प्रारम्भिक मान समस्या को हल कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_o^2 \, y = F_o \sin \omega t, \; \omega \neq \omega_o$$

तथा $t = 0$ पर $y = 0, \dfrac{dy}{dt} = 0$ है ।

5. कोई ***एक*** भाग कीजिए : *10*

(क) निम्नलिखित निरूपण :

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

क़ा उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि

$$J_1(x) + J_3(x) = \frac{4}{x}\, J_2(x)$$

(ख) लेजान्ड्रे बहुपदों के जनक फलन :

$$g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$$

का उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि

$$2x\, P_n'(x) + P_n(x) = P_{n+1}'(x) + P_{n-1}'(x)$$