

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2014

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage : 70%)

Note : Answer any **five** questions. Use of calculators is **not** allowed.

1. (a) Using dimensional analysis, write the expressions for each of the following situations :

6

(i) The hydrostatic pressure P of blood where P is a product of blood density d , height h of the blood column between the heart and some lower point in the body, and gravity g .

(ii) The force F opposing the fall of raindrops through air. Assume that F is the product of viscosity μ , velocity v , and the diameter r of the drop. Neglect density.

(b) Discuss the static stability and dynamic stability for the following demand and supply functions :

4

$$D_t = -0.8 p_t + 60$$

$$S_t = -0.7 p_t + 40$$

2. (a) Formulate the model equation for a ball dropped from a height h metres against a resistance proportional to the square of its velocity. Find the velocity of the ball at any time t . Also, find the limiting velocity as $t \rightarrow \infty$. 5

- (b) Consider a logistically growing population. If the population is harvested at a rate proportional to the population at that instant, formulate the modified logistic equation taking into account the effect of harvesting. If the initial population is K , obtain the solution and discuss it as $t \rightarrow \infty$. 5

3. (a) The differential equations

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \lambda S,$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

model a disease spread by contact where S is the number of susceptibles, I is the number of infectives, β is the contact rate, γ is the removal rate and λ is the birth rate of susceptibles.

- (i) Identify which term in the RHS of each differential equation arises from birth of susceptibles.
- (ii) Discuss the model given by the above two differential equations. 6

(b) Modelling a problem can be done in several ways. We give below the different problems related to tumour growth. Identify the type of model (deterministic, continuous, stochastic or discrete) which is most appropriate in each of the following situations :

4

- (i) Effect of treatment given at regular intervals.
- (ii) Effect of drugs on a patient who is given the drug for a given duration of time.
- (iii) Effect of radiation on tumour cells : some cells may continue to grow but some may be damaged.
- (iv) Finding the time taken for a tumour to double in size.

4. (a) There are two species A and B in a forest. A feeds on B. The increase in population of A is proportional to the population of B, while the decrease in population of B is proportional to population of A. Set up the model equations describing this situation. Also solve the model equations and discuss the nature of the critical points.

5

(b) A colony of bacteria increases at a rate that is proportional to the number of bacteria in the colony. If the population quadruples in two years, find the size of the colony after eight years. 3

(c) State the law used for the formulation of Gaussian model of dispersion. 2

5. (a) The return distribution on the 2 securities A and B, is as follows :

Event (j)	Chance $P_{1j} = P_{2j}$	Return	
		R_{1j}	R_{2j}
1	0.33	19	18
2	0.25	17	16
3	0.17	11	11
4	0.25	10	9

Find which security is more risky in the Markowitz sense. 6

(b) A drug is induced in patient's bloodstream at a constant rate of r gm/sec. Simultaneously the drug is removed at a rate proportional to the amount $x(t)$ of the drug present at any time t .

Determine the differential equation governing the amount $x(t)$. If the initial concentration of the drug in the bloodstream is x_0 , find the concentration of the drug at any time t . 4

6. (a) Two firms X and Y produce the same commodity. Due to production constraints, each firm is able to produce 1, 3 and 5 units. The cost of producing q_x units for firm X is ₹ $[6 + q_x^2 - 2q_x + 5]$ and firm Y has identical cost function ₹ $[6 + q_y^2 - 2q_y + 5]$ for producing q_y units. p is the price of one unit for firm X. We assume that the market is in equilibrium. The outcomes are the profits of the firm shown in the form of a matrix $A = \{a_{ij}\}$ (pay-off matrix). Write (i) a_{11} (ii) a_{22} (iii) a_{21} , if demand function $D(p)$ is given as $D(p) = 50 - p$.

6

- (b) Assume that the Moon is at a distance of 3,00,000 km from the Earth and that it takes 28 days for it to orbit the Earth once. Geostationary satellites are those which are at rest relative to the Earth. Using these two statements derive the altitude of the geostationary satellite from the centre of the Earth.

4

7. (a) A particle of mass m is thrown vertically upward with velocity v_0 . The air resistance is $mg - cv^2$ where c is a constant and v is the velocity at any time t . Show that the time taken by the particle to reach the highest point is given by

$$v_0 \sqrt{c} = \tan(gt \sqrt{c}).$$

5

- (b) Consider a single server queueing system with Poisson input, exponential service times. Suppose the mean arrival rate is 3 calling units per hour, the expected service time is 0.25 hours and the maximum permissible calling units in the system is two. Derive the steady state probability distribution of the number of calling units in the system and then calculate the expected number in the system.

5

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2014

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट : किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) विमीय विश्लेषण का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित प्रत्येक स्थितियों के व्यंजक लिखिए : 6
- (i) रक्त का द्रवस्थैतिक दाब P जहाँ P रक्त घनत्व d , हृदय और शरीर में किसी निम्न बिन्दु के बीच रक्त स्तंभ की ऊँचाई h और गुरुत्व g का गुणनफल है।
- (ii) वायु के माध्यम से गिरती हुई वर्षा की बूँदों का विरोध कर रहा बल F । मान लीजिए F बूँद की श्यानता μ , वेग v और बूँद के व्यास r का गुणनफल है। घनत्व की उपेक्षा कीजिए।
- (ख) निम्नलिखित माँग फलन और पूर्ति फलन के लिए स्थैतिक स्थायित्व और गतिक स्थायित्व की व्याख्या कीजिए : 4

$$D_t = -0.8 p_t + 60$$

$$S_t = -0.7 p_t + 40$$

2. (क) एक गेंद को वातावरण में h मीटर की ऊँचाई से गिराया गया है जहाँ वायु-प्रतिरोध वेग के वर्ग के समानुपाती है। इसके निदर्श समीकरण का सूत्रण कीजिए। किसी समय t पर गेंद का वेग ज्ञात कीजिए। $t \rightarrow \infty$ के लिए सीमांत वेग भी ज्ञात कीजिए।

5

- (ख) एक वृद्धिघात समष्टि लीजिए। यदि समष्टि में उस समय की समष्टि की समानुपाती दर से कटौती हो रही है, तो कटौती के प्रभावों को ध्यान में रखते हुए आपरिवर्तित वृद्धिघात समीकरण का सूत्रण कीजिए। यदि प्रारंभिक समष्टि K है, तो समीकरण का हल प्राप्त कीजिए और $t \rightarrow \infty$ के लिए हल की चर्चा कीजिए।

5

3. (क) अवकल समीकरण

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \lambda S,$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - YI$$

सम्पर्क से फैलने वाली बीमारी का निदर्शन करते हैं जहाँ S सुग्राह्यों की संख्या है, I संक्रामकों की संख्या है, β संपर्क-दर है, Y निष्कासन दर है और λ सुग्राह्यों की जन्म दर है।

- (i) पहचानिए कि दोनों अवकल समीकरणों के दाएँ पक्ष में कौन-से पद सुग्राह्यों के जन्म के कारण प्राप्त हैं।
- (ii) उपर्युक्त दोनों अवकल समीकरणों द्वारा प्राप्त निदर्श पर चर्चा कीजिए।

6

(ख) समस्या का निदर्शन कई विधियों से किया जा सकता है। नीचे हमने ट्यूमर वृद्धि से संबंधित विभिन्न समस्याएँ दी हैं। निम्नलिखित प्रत्येक स्थिति में निदर्श के सबसे उत्तम प्रकार (निर्धारणात्मक, संतत, प्रसंभाव्य या असंतत) को पहचानिए :

4

- (i) नियमित अंतरालों पर दिए गए उपचार का प्रभाव।
- (ii) एक रोगी, जिसे दी गई अवधि तक दवा दी गई हो, पर दवा का प्रभाव।
- (iii) ट्यूमर कोशिकाओं पर विकिरण (radiation) का प्रभाव : कुछ कोशिकाओं की वृद्धि जारी रह सकती है जबकि कुछ को क्षति हो सकती है।
- (iv) ट्यूमर के आमाप को दुगुना होने में लगने वाले समय को ज्ञात करना।

4. (क) एक जंगल में दो स्पीशीज़ A और B हैं। A का आहार B है। समष्टि A में होने वाली वृद्धि समष्टि B के समानुपाती है जबकि समष्टि B में होने वाली कमी समष्टि A के समानुपाती है। इस स्थिति का वर्णन करने वाले निदर्श समीकरण प्राप्त कीजिए। प्राप्त निदर्श समीकरणों को हल कीजिए और क्रांतिक बिन्दुओं के स्वरूप की भी चर्चा कीजिए।

5

(ख) बैक्टीरिया की एक कॉलोनी की वृद्धि दर कॉलोनी में बैक्टीरिया की संख्या के समानुपाती है। यदि दो वर्षों में समष्टि चौगुनी हो जाती है, तो आठ वर्षों के पश्चात् कॉलोनी का आमाप क्या होगा ? 3

(ग) गाउसीय परिक्षेपण निदर्श के सूत्रण के लिए प्रयोग किया जाने वाला नियम लिखिए। 2

5. (क) दो प्रतिभूतियों A और B का प्रतिफल बंटन निम्नलिखित है :

घटना (j)	प्रायिकता $P_{1j} = P_{2j}$	प्रतिफल	
		R_{1j}	R_{2j}
1	0.33	19	18
2	0.25	17	16
3	0.17	11	11
4	0.25	10	9

मार्कोविट्ज़ निदर्श के अनुसार कौन-सी प्रतिभूति अधिक जोखिम वाली है ? 6

(ख) कोई दवाई एक रोगी की रक्त धारा में r ग्राम/सेकण्ड की अचर दर से प्रेरित की जा रही है। इसके साथ ही, यह दवाई किसी भी समय t पर उपस्थित दवाई की मात्रा $x(t)$ के समानुपाती दर से निकाली जा रही है। मात्रा $x(t)$ नियंत्रित करने वाला अवकल समीकरण निर्धारित कीजिए। यदि रक्त धारा में दवाई की प्रारंभिक सांद्रता x_0 है, तो किसी भी समय t पर इस दवाई की सांद्रता ज्ञात कीजिए। 4

6. (क) दो फर्म X और Y एक ही उपभोक्ता वस्तु का उत्पादन करती हैं। उत्पादन व्यवरोधों के कारण, प्रत्येक फर्म 1, 3 और 5 इकाइयाँ निर्मित करने में समर्थ हो पाती हैं। फर्म X के लिए q_x इकाइयाँ निर्मित करने की लागत $[6 + q_x^2 - 2q_x + 5]$ ₹ है तथा फर्म Y के लिए q_y इकाइयाँ निर्मित करने का सर्वसम लागत फलन $[6 + q_y^2 - 2q_y + 5]$ ₹ है। फर्म X के लिए एक इकाई की कीमत p है। हम कल्पना करते हैं कि बाज़ार संतुलन में है। परिणाम फर्मों के लाभ हैं, जिन्हें एक आव्यूह $A = [a_{ij}]$ (भुगतान आव्यूह) के रूप में दर्शाया जाता है। यदि माँग फलन $D(p) = 50 - p$ हो, तो (i) a_{11} (ii) a_{22} (iii) a_{21} ज्ञात कीजिए।

6

- (ख) मान लीजिए कि चन्द्रमा पृथ्वी से 3,00,000 किमी की दूरी पर है तथा यह पृथ्वी के परितः एक परिभ्रमण 28 दिन में करता है। तुल्यकारी उपग्रह वे उपग्रह हैं जो पृथ्वी के सापेक्ष विश्राम में रहते हैं। इन दो कथनों का उपयोग करते हुए, पृथ्वी के केन्द्र से तुल्यकारी उपग्रह की ऊँचाई निगमित कीजिए।

4

7. (क) द्रव्यमान m वाले एक कण को ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर वेग v_0 से फेंका जाता है। वायु प्रतिरोध $mg - cv^2$ है, जहाँ c एक अचर है तथा v किसी भी समय t पर वेग है। दिखाइए कि उस कण को सबसे अधिक ऊँचे बिन्दु तक पहुँचने में लगा समय $v_0 \sqrt{c} = \tan(gt \sqrt{c})$ द्वारा प्राप्त है।

5

(ख) प्वासों निवेश और चरघातांकीय सेवा काल वाली एक एकल सेवाकर्ता पंक्ति प्रणाली लीजिए । मान लीजिए कि माध्य आगमन दर प्रति घंटा 3 काल यूनिट है, प्रत्याशित सेवा काल 0.25 घंटा है और प्रणाली में अधिकतम अनुमत काल यूनिट दो हैं । प्रणाली में काल यूनिटों की संख्या का अपरिवर्ती अवस्था प्रायिकता बंटन व्युत्पन्न कीजिए और तब प्रणाली में प्रत्याशित संख्या परिकलित कीजिए ।

5