

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME**Term-End Examination**

03921

June, 2014**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS****MTE-08 : DIFFERENTIAL EQUATIONS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50**(Weightage : 70%)*

Note : Question no. 1 is **compulsory**. Answer any **four** questions out of the remaining questions no. 2 - 7. Calculators are **not** allowed.

1. State whether the following statements are true or false. Justify your answer with the help of a short proof or a counter example. 2×5=10

(a) The degree of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

is 1.

(b) The solution of the differential equation

$$y = px + p - p^2$$

where $p = \frac{dy}{dx}$, is $y = cx + c - c^2$ (c is an arbitrary constant).

- (c) The most general form of a second order partial differential equation in two independent variables x and y is

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G,$$

where A, B, C, D, E, F and G are constants only.

- (d) The equation

$$yz \, dx + (x^2y - xz) \, dy + (x^2z - xy) \, dz = 0$$

is not integrable.

- (e) A particular integral of the differential equation

$$y'' - 2y' = e^x \sin x$$

is $\frac{1}{2} e^x \sin x$.

2. (a) Solve the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 3}{2x + y - 3}. \quad 3$$

- (b) Solve the differential equation

$$x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x. \quad 3$$

- (c) Given that $y_1(x) = \frac{1}{x}$ is one solution of the differential equation

$$2x^2 y'' + 3x y' - y = 0, \quad x > 0$$

find a second linearly independent solution of the equation. 4

3. (a) Solve the simultaneous equations

$$\frac{dx}{(x-y)y^2} = \frac{dy}{-(x-y)x^2} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}. \quad 3$$

- (b) Solve the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2e^{3x}. \quad 3$$

- (c) Apply the method of variation of parameters to solve the following differential equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^2y = \sec nx;$$

where n is a constant. 4

4. (a) In a certain culture of bacteria the rate of increase of bacteria is proportional to the number present. If the number of bacteria doubles in 4 hours, how many will there be at the end of 12 hours? 4

- (b) Solve the partial differential equation

$$xzp + yzq = xy. \quad 3$$

- (c) Apply Charpit's method to solve the equation

$$z - px - qy = p^2 + q^2. \quad 3$$

5. (a) Solve the differential equation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 3\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} - 2z = e^{x-y} - x^2y. \quad 5$$

- (b) Solve :

$$x^2 y'' - 2x y' + 2(1+x^2)y = 0, \quad x > 0. \quad 3$$

- (c) Classify the following partial differential equation into elliptic, parabolic or hyperbolic equation :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y \frac{\partial u}{\partial y} . \quad 2$$

6. (a) Find the temperature in a bar of length l with both ends insulated and with initial temperature in the rod being $\sin \frac{\pi x}{l}$. 7

- (b) Solve the differential equation

$$x \, dx + y \, dy = \frac{a^2(x \, dy - y \, dx)}{x^2 + y^2} . \quad 3$$

7. (a) Find the orthogonal trajectories on the sphere

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

of its intersections with the family of planes

$$z = k, \quad -2 \leq k \leq 2. \quad 5$$

- (b) Write the equation

$$y \, dx + (xy + x - 3y) \, dy = 0$$

in the linear form and hence find its solution. 3

- (c) Find a homogeneous linear differential equation with constant coefficients that is satisfied by $y = 4x e^x \sin 2x$. 2

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2014

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-08 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट: प्रश्न सं. 1 करना अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से कोई चार प्रश्न कीजिए। कैलकुलेटर्स का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य।

प्रत्युदाहरण अथवा संक्षिप्त उपपत्ति की सहायता से अपने उत्तर

की पुष्टि कीजिए।

2×5=10

(क) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ की घात 1

है।

(ख) अवकल समीकरण

$$y = px + p - p^2 \text{ जहाँ } p = \frac{dy}{dx},$$

का हल $y = cx + c - c^2$ है (c एक स्वेच्छ अचर है)।

- (ग) दो स्वतंत्र चरों x और y में द्वितीय कोटि आंशिक अवकल समीकरण का सबसे व्यापक रूप

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G,$$

होता है, जहाँ A, B, C, D, E, F और G केवल अचर होते हैं।

- (घ) समीकरण

$$yz \, dx + (x^2y - xz) \, dy + (x^2z - xy) \, dz = 0$$

समाकलनीय नहीं है।

- (ङ) अवकल समीकरण

$$y'' - 2y' = e^x \sin x$$

का विशेष समाकल $\frac{1}{2} e^x \sin x$ है।

2. (क) निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 3}{2x + y - 3} \quad 3$$

- (ख) अवकल समीकरण हल कीजिए :

$$x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x. \quad 3$$

- (ग) दिया गया है कि $y_1(x) = \frac{1}{x}$ अवकल समीकरण

$$2x^2 y'' + 3x y' - y = 0, \quad x > 0$$

का एक हल हो, तो समीकरण का दूसरा रैखिकतः स्वतंत्र हल ज्ञात कीजिए।

4

3. (क) युगपत अवकल समीकरण

$$\frac{dx}{(x-y)y^2} = \frac{dy}{-(x-y)x^2} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}$$

को हल कीजिए ।

3

(ख) अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2e^{3x}$$

का हल प्राप्त कीजिए ।

3

(ग) निम्नलिखित अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^2y = \sec nx;$$

जहाँ n एक अचर है, का हल प्राचल विचरण विधि द्वारा प्राप्त कीजिए ।

4

4. (क) एक विशिष्ट जीवाणु संवर्ध में जीवाणु की वृद्धि दर उपस्थित संख्या के समानुपाती है । यदि 4 घंटे में जीवाणु की संख्या दुगुनी हो जाती हो, तो 12 घंटे बाद कितने जीवाणु होंगे ?

4

(ख) आंशिक अवकल समीकरण

$$xzp + yzq = xy$$

का हल प्राप्त कीजिए ।

3

(ग) चार्पिट विधि द्वारा समीकरण

$$z - px - qy = p^2 + q^2$$

का हल प्राप्त कीजिए ।

3

5. (क) अवकल समीकरण

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 3\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} - 2z = e^{x-y} - x^2y$$

का हल प्राप्त कीजिए ।

5

(ख) हल कीजिए :

$$x^2 y'' - 2x y' + 2(1+x^2)y = 0, x > 0.$$

3

(ग) निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरण

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y \frac{\partial u}{\partial y}$$

को दीर्घवृत्तीय, परवलयिक अथवा अतिपरवलयिक समीकरण में वर्गीकृत कीजिए ।

2

6. (क) लंबाई l वाली छड़ का तापमान ज्ञात कीजिए जिसके दोनों सिरे ऊष्मारोधी हैं, जहाँ छड़ का प्रारंभिक तापमान

$$\sin \frac{\pi x}{l} \text{ है ।}$$

7

(ख) अवकल समीकरण

$$x dx + y dy = \frac{a^2(x dy - y dx)}{x^2 + y^2}$$

का हल प्राप्त कीजिए ।

3

7. (क) गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ पर समतल निकाय $z = k$, $-2 \leq k \leq 2$ के साथ इसके प्रतिच्छेदों की लंबकोणीय संछेदी ज्ञात कीजिए ।

5

(ख) अवकल समीकरण

$$y dx + (xy + x - 3y) dy = 0$$

को रैखिक रूप में लिखिए और फिर इसका हल ज्ञात कीजिए ।

3

(ग) अचर गुणांकों वाला वह समघात रैखिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जो $y = 4x e^x \sin 2x$ द्वारा संतुष्ट होता हो ।

2