No. of Printed Pages : 8 **MTE-06**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

02731

June, 2014

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Attempt* ***five*** *questions in all. Question no. 7 is* ***compulsory****. Answer any* ***four*** *questions from questions no. 1 to 6. Calculators are* ***not*** *allowed.*

---

1. (a) Let $\mathbf{R}$ be a Euclidean domain with Euclidean valuation d. Show that a non-zero element $u \in \mathbf{R}$ is a unit in $\mathbf{R}$ if and only if $d(u) = d(1)$. *4*

(b) Let G be a finite group and H be the only subgroup of G of order m. Prove that H is a normal subgroup of G. *3*

(c) Let S be the set of all polynomials with rational coefficients. Define a relation $\sim$ on S as follows :

$$p_1(x) \sim p_2(x) \text{ if } p_1(x) \text{ divides } p_2(x).$$

Is the relation $\sim$ reflexive, symmetric and transitive ? Justify your answer. *3*

2. (a) Let G be a group containing 56 elements. Show that G has a normal subgroup of order 7 or a normal subgroup of order 8. *4*

(b) Let $\mathbf{R} = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbf{Z} \right\}$. Check whether $\mathbf{R}$ is a ring with identity with respect to matrix addition and matrix multiplication. *4*

(c) If G is a group such that $(xy)^2 = x^2y^2$ for all $x, y \in G$, show that G is abelian. *2*

3. (a) Let $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbf{R},\ a^2 \neq b^2 \right\}$.

Check whether G is a group under multiplication. Is G abelian ? Justify your answer. *4*

(b) Show that $f : \mathbf{Z} + \sqrt{3}\,\mathbf{Z} \to \mathbf{Z} + \sqrt{3}\,\mathbf{Z}$ defined by $f(m + \sqrt{3}\,n) = m - \sqrt{3}\,n$, is a homomorphism of rings. Is it bijective ? If yes, find f^{-1}. *4*

(c) Find signatures of the following permutations :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Is it an even permutation ? Justify your answer. *2*

4. (a) Find the orders of the following permutations : 3

(i) (12)(34)

(ii) (14)(34)

(b) Check whether $24x^3 + 18x^2 - 27x + 72$ is irreducible over $\mathbf{Q}[X]$. Is it irreducible over $\mathbf{Z}[X]$? Justify your answer. Is $\dfrac{\mathbf{Q}[X]}{(24x^3 + 18x^2 - 27x + 72)}$ a field ? Justify your answer. 4

(c) Let H and K be subgroups of a group G. Show that $H \cup K$ is a subgroup of G if and only if $H \subseteq K$ or $K \subseteq H$. 3

5. (a) Let G be a group and let $g \in G$. Define an operation $*$ on G by $a * b = a\,g\,b$ for all $a, b \in G$. Prove that G is a group with respect to $*$. 4

(b) Let $R = \left\{ a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbf{Z} \right\}$. Find all the units of R. Check whether $1 + \sqrt{-3}$ is irreducible in R. 6

6. (a) Let

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle|\ a, b, c, d \in \mathbf{R},\ ad - bc > 0 \right\}$$

and $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle|\ ad - bc = 1 \right\}$. Check whether H is a subgroup of G. Is it normal in G ? 3

(b) Prove that a non-zero homomorphism f from a field F into a ring R is always injective. *4*

(c) Let R be an integral domain and let $a \in R$. Under what conditions on a, $\langle a \rangle = R$? Find all the $a \in \mathbf{Z}_5$ such that $\langle a \rangle = \mathbf{Z}_5$. *3*

7. Which of the following statements are true ? Justify your answers. *2×5=10*

(i) A polynomial of degree 3 in $\mathbf{Z}_6[x]$ can have four roots in $\mathbf{Z}_6$.

(ii) A group of order 24 can have a subgroup of order 4 and index 8.

(iii) The set of all odd permutations in S_n is a subgroup of S_n.

(iv) Characteristic of a finite field containing 2^3 elements is 3.

(v) In a ring R if $a, b \in R$ are such that $a + b$ is a zero divisor, than both a and b are zero divisors.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2014

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-06 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : कुल ***पाँच*** *प्रश्न कीजिए । प्रश्न सं. 7 करना* ***अनिवार्य*** *है । प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं* ***चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।*

---

1. (क) मान लीजिए $\mathbf{R}$ एक यूक्लिडीय मानांकन d वाला यूक्लिडीय प्रांत है । दिखाइए कि शून्येतर अवयव $u \in \mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ में एक मात्रक है, यदि और केवल यदि $d(u) = d(1)$. *4*

(ख) मान लीजिए G एक परिमित समूह है और H, कोटि m का G का केवल उपसमूह है । सिद्ध कीजिए कि H, G का प्रसामान्य उपसमूह है । *3*

(ग) मान लीजिए S परिमेय गुणांकों वाले सभी बहुपदों का समुच्चय है । S पर तुल्यता संबंध ~ इस प्रकार परिभाषित कीजिए :

$p_1(x) \sim p_2(x)$ यदि $p_1(x)$, $p_2(x)$ को विभाजित करता हो ।

क्या संबंध ~ स्वतुल्य, सममित और संक्रामक है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *3*

2. (क) मान लीजिए G, 56 अवयवों वाला समूह है । दिखाइए कि G का कोटि 7 का प्रसामान्य उपसमूह है या कोटि 8 का प्रसामान्य उपसमूह है । *4*

(ख) मान लीजिए $\mathbb{R} = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. जाँच कीजिए कि $\mathbb{R}$ आव्यूह योग और आव्यूह गुणा के सापेक्ष तत्समकी वलय है या नहीं । *4*

(ग) यदि G एक ऐसा समूह है जिसके सभी $x, y \in G$ के लिए $(xy)^2 = x^2y^2$, तब दिखाइए कि G आबेली है । *2*

3. (क) मान लीजिए

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R}, \; a^2 \neq b^2 \right\}.$$

जाँच कीजिए कि G गुणा के अधीन एक समूह है या नहीं । क्या G आबेली है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *4*

(ख) दिखाइए कि फलन $f : \mathbb{Z} + \sqrt{3}\,\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} + \sqrt{3}\,\mathbb{Z}$, $f(m + \sqrt{3}\,n) = m - \sqrt{3}\,n$ द्वारा परिभाषित वलयों की समाकारिता है । क्या यह एकैकी आच्छादी है ? यदि है तो f^{-1} ज्ञात कीजिए । *4*

(ग) निम्नलिखित क्रमचय के चिह्नक ज्ञात कीजिए :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

क्या यह एक सम क्रमचय है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *2*

4. (क) निम्नलिखित क्रमचयों की कोटियाँ ज्ञात कीजिए : 3

(i) (12)(34)

(ii) (14)(34)

(ख) जाँच कीजिए कि $24x^3 + 18x^2 - 27x + 72$, $\mathbf{Q}[X]$ पर अखंडनीय है या नहीं। क्या यह $\mathbf{Z}[X]$ पर अखंडनीय है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । क्या $\dfrac{\mathbf{Q}[X]}{(24x^3 + 18x^2 - 27x + 72)}$ एक क्षेत्र है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 4

(ग) मान लीजिए H और K समूह G के उपसमूह हैं । दिखाइए कि $H \cup K$, G का उपसमूह है यदि और केवल यदि $H \subseteq K$ या $K \subseteq H$. 3

5. (क) मान लीजिए G एक समूह है और $g \in G$. सभी $a, b \in G$ के लिए $a * b = a\,g\,b$ द्वारा G पर संक्रिया $*$ परिभाषित कीजिए । सिद्ध कीजिए कि $*$ के सापेक्ष G एक समूह है । 4

(ख) मान लीजिए $R = \left\{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbf{Z}\right\}$. R के सभी मात्रक ज्ञात कीजिए । जाँच कीजिए कि R में $1 + \sqrt{-3}$ अखंडनीय है या नहीं । 6

6. (क) मान लीजिए

$$G = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c, d \in \mathbf{R},\ ad - bc > 0\right\}$$

और $H = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ ad - bc = 1\right\}$. जाँच कीजिए कि H, G का उपसमूह है या नहीं । क्या यह G में प्रसामान्य है ? 3

(ख) सिद्ध कीजिए कि यदि f क्षेत्र F से वलय R की एक शून्येतर समाकारिता है तो f सदैव एकैकी होता है । *4*

(ग) मान लीजिए R पूर्णांकीय प्रांत है और $a \in R$. a पर किन प्रतिबंधों के अधीन $<a> = R$? सभी $a \in \mathbf{Z}_5$ ज्ञात कीजिए जिनके लिए $<a> = \mathbf{Z}_5$. *3*

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं ? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए । *2×5=10*

(i) $\mathbf{Z}_6[x]$ में घात 3 के बहुपद के $\mathbf{Z}_6$ में चार मूल हो सकते हैं ।

(ii) कोटि 24 के समूह में कोटि 4 और सूचकांक 8 का एक उपसमूह हो सकता है ।

(iii) S_n में सभी विषम क्रमचयों का समुच्चय S_n का उपसमूह है ।

(iv) 2^3 अवयवों वाले परिमित क्षेत्र का अभिलक्षणिक 3 है ।

(v) वलय R में यदि $a, b \in R$ ऐसे हैं जिनके लिए $a + b$ शून्य का भाजक है, तब a और b दोनों शून्य के भाजक हैं ।