No. of Printed Pages : 8

MTE-09

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2013

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-09 : REAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Weightage : 70%

Note : *Attempt **five** questions in all. Q. No. **1** is **compulsory**. Do **any four** questions out of Q. No. 2 to 7.*

1. Are the following statements **true** or **false** ? Give reasons for your answer. **10**

(a) The sequence $\{s_n\}$ where

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$ is Cauchy.

(b) If a continuous function f: [a, b]$\rightarrow R$ changes sign in [a, b], then it has a zero therein.

(c) The open interval (0, 1) and R are equivalent.

(d) There exists a function f : $[-1, 1] \rightarrow R$ such that

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & -1 \leq x < 0 \end{cases}.$$

(e) The function $f : [0, 1] \to R$ defined by

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \frac{1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{1}{2^n}, \; n \geq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

is integrable.

2. (a) Prove that an upper bound u of a non-Empty set $S \subset R$ is the supremum of S if and only if for every $\varepsilon > 0$ there exists an $s_\varepsilon \in S$ such that $u - \varepsilon < s_\varepsilon$. **4**

(b) Find the limit, when n tends to infinity, of the following series. **6**

(i) $$\sum_{r=1}^{2n} \frac{n^2}{(5n + r)^3}.$$

(ii) $$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+5)^3}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+10)^3}} + \ldots + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{[n+5(n-1)]^3}} + \ldots .$$

3. (a) Prove that every continuous function defined on a closed and bounded interval attains its maximum. Can boundedness assumption be dropped from this result ? Justify. **6**

(b) Prove that : **4**

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

4. (a) Show that the sequence $f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$, $x \in [0, 1]$, converges uniformly. Is $\{f_n(x)\}$ a univerformly convergent sequence ? Justify. 5

(b) Prove that $7^n - 3^n$ is divisible by 4, $\forall n \geq 1$. 2

(c) Justify that $\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x - 3)^2} = \infty$. 3

5. (a) Examine the function $(x-3)^5 (x+1)^4$ for extreme values. 5

(b) Prove that product of two convergent sequences is convergent. 3

(c) Prove that the set $\left\{\frac{5}{3n} : n \in \mathbf{N}\right\}$ is not open. 2

6. (a) For $n \geq 1$, let 3

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

so that $\lim_{x \to \infty} a_n = \gamma$, the Euler's constant.

Show that

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots = \log 2.$$

(b) Show that a set $F \subset R$ is closed if and only if $F = \overline{F}$. Hence deduce that the following sets is closed : 4

Z, $\left\{\frac{1}{n} | \ n \in N\right\}$.

(c) Show that the sequence, $\{S_n\}$, where 3

$$S_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots\cdots + \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbf{N}$$ is

convergent.

7. (a) Show that the function $f(x) = x^3$ is not uniformly continuous on $\boldsymbol{R}$. Does there exists a set $A \subset \boldsymbol{R}$ such that f restricted to A is uniformly continuous ? Justify. 4

(b) Test the following series for convergence : 4

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 - n - 3}{n^3 + 2n} ;$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}$$

(c) Evaluate $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{ex^2 - 1}$. 2

एम.टी.ई.-09

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बीडीपी)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2013

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

कुल का : 70%

नोट : ***कुल पाँच*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न संख्या 1* ***अनिवार्य*** *है। प्रश्न संख्या 2 से 7 में से* ***कोई चार*** *प्रश्न कीजिए।*

---

1. बताइए निम्नलिखित कथन **सत्य** हैं या **असत्य**। अपने उत्तरों के कारण बताइए। **10**

(a) अनुक्रम $\{s_n\}$ जहाँ $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ कॉशी है।

(b) यदि एक संतत फलन $f : [a, b] \to R$ [a, b] में चिन्ह बदलता है, तब फलन का लोपन हो जाता है।

(c) विवृत्त अन्तराल (0, 1) और R समतुल्य हैं।

(d) एक ऐसे फलन $f : [-1, 1] \to R$ का अस्तित्व होता है जिसके लिए

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & -1 \leq x < 0 \end{cases}.$$

(e) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \frac{1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{1}{2^n}, \; n \geq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ द्वारा

परिभाषित फलन $f : [0, 1] \to R$, समाकलनीय होता है।

2. (a) सिद्ध कीजिए कि अरिक्त समुच्चय $S \subset R$ का उपरि परिबंध u, S का उच्चक है, यदि और केवल यदि प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए एक ऐसे $s_\varepsilon \in S$ का अस्तित्व होता है जिसके $u - \varepsilon < s_\varepsilon$. 4

(b) निम्नलिखित श्रेणियों की सीमा ज्ञात कीजिए, जब n अनंतता की ओर प्रवृत्त होता है। 6

(i) $\sum_{r=1}^{2n} \frac{n^2}{(5n + r)^3}$.

(ii) $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+5)^3}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+10)^3}} + \ldots + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{[n+5(n-1)]^3}} + \ldots$.

3. (a) सिद्ध कीजिए कि संवृत्त और परिबद्ध अन्तराल पर परिभाषित संतत फलन अपने उच्चिष्ठ को प्राप्त करता है। क्या इस परिणाम से परिबद्धता प्रतिबंध को छोड़ा जा सकता है? पुष्टि कीजिए। 4

(b) सिद्ध कीजिए कि 6

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

4. (a) दिखाइए कि अनुक्रम $f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$, $x \in [0, 1]$, एक समानतः अभिसरित होता है। क्या $\{f_n'(x)\}$ एक समानतः अभिसारी है। पुष्टि कीजिए। 5

(b) सिद्ध कीजिए कि $7^n - 3^n \ \forall\, n \geq 1$, 4 से विभाजित होता है। 2

(c) पुष्टि कीजिए कि $\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty$. 3

5. (a) चरम मानों के लिए फलन $(x-3)^5 (x+1)^4$ की जाँच कीजिए। 5

(b) सिद्ध कीजिए कि दो अभिसारी अनुक्रमों का गुणनफल अभिसारी होता है। 3

(c) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\left\{\frac{5}{3n} : n \in \mathbf{N}\right\}$ विवृत्त नहीं है। 2

6. (a) $n \geq 1$ के लिए मान लीजिए 3

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

ताकि $\lim_{x \to \infty} a_n = \gamma$, आयलर अचर है। दिखाइए कि

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\cdots = \log 2.$$

(b) दिखाइए कि समुच्चय $F \subset R$ संवृत्त है यदि और केवल यदि $F = \bar{F}$ इस तरह निष्कर्ष निकालिए कि निम्नलिखित समुच्चय संवृत्त हैं : 4

Z, $\left\{\frac{1}{n} | \ n \in N\right\}$.

(c) दिखाइए कि अनुक्रम, $\{S_n\}$ जहाँ 3

$S_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots\cdots + \frac{1}{n!}$, $n \epsilon \mathbf{N}$ अभिसारी है।

7. (a) दिखाइए कि फलन $f(x) = x^3$, R पर एकसमानत: संतत नहीं है। क्या ऐसे समुच्चय $A \subset R$ का अस्तित्व होता है जिसके लिए f एकसमानत: संतत है? पुष्टि कीजिए। 4

(b) निम्नलिखित अभिसरण के लिए श्रेणियों की जाँच कीजिए। 4

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 - n - 3}{n^3 + 2n}$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}$

(c) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{e x^2 - 1}$ का मूल्यांकन कीजिए। 2