No. of Printed Pages : 8

MTE-06

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2013

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Weightage : 70%

Note : *Attempt **five** questions in **all**. Question No. 7 is **compulsory**. Answer **any four** questions from the rest. Use of calculators **not** permitted.*

1. (a) Prove that any finite group is a subgroup of a permutation group. 6

   (b) Let d be a Euclidean norm on a Euclidean domain D. Show that if $s \in Z$ such that $s + d(1) > 0$, then $g : D \setminus \{0\} \to Z$: $g(a) = d(a) + s$, for non-zero $a \in D$, is a Euclidean norm on D. 4

2. (a) If H and K are subgroups of a group G, and if only H is a normal subgroup of G, then prove or disprove that HK is a subgroup of G. Give an example to show that HK need not be a subgroup if neither H nor K is a normal subgroup of G. 4

(b) Show that $\phi : R[x] \to R$, defined by $\phi(a_0 + a_1x + ... + anx^n) = a_0 + a_1 + ... + a_n$, is a ring homomorphism. Check whether ker ϕ is a principal ideal or not. Is it a maximal ideal ? Why, or why not ? 6

3. (a) Show that the group $G = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$ under multiplication modulo 8 is isomorphic to the group $H = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}\}$ under multiplication modulo 12. Also show that neither of them is isomorphic to the group $F = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}\}$ under multiplication modulo 10. 5

(b) Check whether 3

$$Q[x] \Big/ \langle 4x^7 - 3x^5 + 3x^4 - 15 \rangle$$

is a field or not. If it is a field, give its characteristic. If it is not a field, obtain its quotient field.

(c) Let R and R' be commutative rings and $f : R \to R'$ be a ring homomorphism. If I is an ideal of R, check whether f(I) is an deal of R' or not. 2

4. (a) Let G be a group of order 21. Show that G has a proper normal non-trivial subgroup. 3

(b) Apply the principle of induction to show that $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ is divisible by $9 \forall n \in N$. 3

(c) State the Fundamental theorem of Algebra. Also give a polynomial of degree n over a ring R which has more than n roots in R. 4

5. (a) Let $R = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a, b \in Z, 3 \text{ does not divide } b \right\}$. 6
Show that R is a ring, and an integral domain. Also find its quotient field.

(b) Let $G = Z/_{<20>}$ and $H = <4>/_{<20>}$. List the elements of H and $G/_H$. 4

6. (a) Count the number of distinct 3 - cycles in S_4. Further, find the number of distinct cycles of length r is S_n, where r>1. 4

(b) If R is a PID, so is R[x]. True or false ? Why ? 4

(c) Check whether or not '$\sim$' is an equivalence relation on Z, where 'a$\sim$b if $a = b^r$ for some $r \in N$'. 2

7. Which of the following statements are **true** ? Give reasons for your answer. 10

(a) Subring of a UFD must be a UFD.

(b) If K is a normal subgroup of H and H is a normal subgroup of G, then K is a normal subgroup of G.

(c) The field of quotients of $Z + \sqrt{2}\, Z$ is R.

(d) $\{Z, Q, \text{IGNOU}\}$ is a set.

(e) Any subset of a ring $(R, \oplus, \odot)$ is a ring with respect to the operations of $\oplus$ and $\odot$.

एम.टी.ई.-06

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2013

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.- 06 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

कुलांक : 70%

नोट : *कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न सं. 7 करना **ज़रूरी** है। शेष में से **किन्हीं चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।*

---

1. (a) सिद्ध कीजिए कि कोई भी परिमित समूह क्रमचय समूह का एक उपसमूह होता है। 6

(b) मान लीजिए d यूक्लिडीय प्रांत D पर एक यूक्लिडीय मानक फलन है। दिखाइए कि यदि ऐसा $s \in Z$ है जिसके लिए $s + d(1) > 0$, तब शून्येतर $a \in D$ के लिए $g : D \setminus \{0\} \to Z : g(a) = d(a) + s$, D पर एक यूक्लिडीय मानक फलन है। 4

2. (a) यदि H और K समूह G के उपसमूह हैं और यदि केवल H, G का प्रसामान्य समूह है, तब सिद्ध या असिद्ध कीजिए कि HK, G का उपसमूह है। यदि न तो H और न ही K, G के प्रसामान्य उपसमूह है, तब HK का भी एक उपसमूह होना ज़रूरी नहीं, यह दिखाने के लिए एक उदाहरण दीजिए। 4

(b) दिखाइए कि 6

$\phi(a_0 + a_1x + ... + anx^n) = a_0 + a_1 + ... + a_n$ द्वारा परिभाषित $\phi : R[x] \to R$ एक वलय समाकारिता है। जाँच कीजिए कि $\ker \phi$ मुख्य गुणजावली है या नहीं। क्या यह उच्चिष्ठ गुणजावली है ? है तो क्यों, या नहीं है तो क्यों नहीं ?

3. (a) दिखाइए कि गुणन माड्यूलो 8 के अधीन समूह $G = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$ गुणज माड्यूलों 12 के अधीन समूह $H = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}\}$ के तुल्याकारी है। यह भी दिखाइए कि इनमें से कोई भी समूह गुणन माड्यूलों 10 के अधीन समूह $F = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}\}$ के तुल्याकारी नहीं हैं। 5

(b) जाँच कीजिए कि 3

$Q[x] / \langle 4x^7 - 3x^5 + 3x^4 - 15 \rangle$ एक क्षेत्र है या नहीं। यदि यह क्षेत्र नहीं है, तो इसका अभिलक्षणिक दीजिए। यदि यह क्षेत्र नहीं है, तो इसका विभाग क्षेत्र प्राप्त कीजिए।

(c) मान लीजिए R और R' क्रमविनिमेय वलय हैं और $f : R \to R'$ एक वलय समाकारिता है। यदि I, R की गुणजावली है, तब जाँच कीजिए कि f(I), R' की गुणजावली है या नहीं। 2

4. (a) मान लीजिए G कोटि 21 वाला एक समूह है। दिखाइए कि G का एक उचित प्रसामान्य अतुच्छ उपसमूह होता है। 3

(b) यह दर्शाने के लिए कि $\forall\, n \epsilon N$ $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ 9 से विभाज्य है, आगमन नियम का प्रयोग कीजिए। 3

(c) बीजगणित के मूल प्रमेय का कथन दीजिए। वलय R पर घात n वाला ऐसा बहुपद दीजिए जिसके R में n से ज़्यादा मूल हैं। 4

5. (a) मान लीजिए $R = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a, b \epsilon Z,$ जहाँ 3, b को विभाजित नहीं करता $\right\}$। दिखाइए कि R एक वलय है, और एक पूर्णांकीय प्रांत है। इसका विभाग क्षेत्र भी ज्ञात कीजिए। 6

(b) मान लीजिए $G = Z/\langle 20 \rangle$ और $H = \langle 4 \rangle/\langle 20 \rangle$ H और G/H के अवयवों की सूची बनाइए। 4

6. (a) S_4 में अलग-अलग 3 - चक्रों की संख्या की गणना कीजिए। इसके आगे, S_n में r लंबाई के अलग-अलग चक्रों की संख्या ज्ञात कीजिए जहाँ $r>1$ है। 4

(b) यदि R एक PID है, तो $R[x]$ भी PID होगा। यह सत्य है या असत्य? क्यों? 4

(c) जाँच कीजिए कि '$\sim$', Z पर तुल्यता संबंध है या नहीं, जहाँ 'a$\sim$b यदि और केवल यदि $a = b^r$ किसी $r \epsilon N$' के लिए। 2

7. निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं? अपने उत्तर के कारण बताइए। 10

(a) किसी भी UFD का उपवलय UFD ही होगा।

(b) यदि K, H का प्रसामान्य उपसमूह है और H, G का प्रसामान्य उपसमूह है, तब K, G का प्रसामान्य उपसमूह होगा।

(c) $Z + \sqrt{2}\, Z$ के विभग क्षेत्र R है।

(d) {Z, Q, IGNOU} एक समुच्चय है।

(e) वलय $(R, \oplus, \odot)$ का कोई भी उपसमुच्चय $\oplus$ और $\odot$ संक्रियाओं के सापेक्ष एक वलय होगा।