

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME  
(BDP)**

**Term-End Examination**

**June, 2013**

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS**

**MTE-01 : CALCULUS**

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage 70%)

**Note :** Question no. 1 is *compulsory*. Solve *any four* from the remaining questions.

1. Which of the following statements are *true* ? 10  
Justify your answers :

(a) If a function  $f$  from  $\mathbf{R}$  to  $\mathbf{R}$  is such that  $|f|$  is continuous, then  $f$  is also continuous.

(b) The function  $f$ , defined by  $f(x) = x + \sin x$ , is monotonic in  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ .

(c)  $\int_0^3 |x - 1| dx = \frac{3}{2}$

(d)  $\frac{d}{dx} \left[ \int_x^{e^x} \ln t dt \right] = xe^x - \ln x$

(e)  $y(x^2 + 4) = 2$  has oblique asymptotes.

2. (a) If  $y = \ln[x + \sqrt{x^2 + 1}]$ , check whether  $(1 + x^2)y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0$  is true or not. 4
- (b) Find lower and upper integrals of  $f$ , defined on  $[-1, 1]$ , by 4
- $$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \text{ is rational} \\ 2, & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$
- Hence check the integrability of  $f$  on  $[-1, 1]$ .
- (c) Check whether the function  $f$ , defined by  $f(x) = \cos x - \cos 3x$ , is periodic or not. 2
3. (a) By dividing the interval  $[0, 4]$  into 4 equal parts, find the approximate value of  $\int_0^4 \frac{dx}{x+1}$ , using Simpson's rule. 3
- (b) Differentiate  $\sin^{-1}x$  with respect to  $\cos^{-1}(\sqrt{1-x^2})$ . 2
- (c) If, for  $n \geq 1$ ,  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx \, dx$ , find the value of  $2I_{n+1} - I_n$ . Hence evaluate  $I_2$ . 5
4. Trace the curve  $x^2 = y^2(x+1)^3$ , stating all the properties used in the process. 10

5. (a) State Lagrange's Mean Value Theorem and use it to prove that 6

$$1 + x < e^x < 1 + xe^x, \quad \forall x > 0.$$

- (b) Find the derivative of  $(\tan x)^{\sec x} + (\sec x)^{\cot x}$  with respect to  $x$ . 4

6. (a) Find the volume of the solid generated by the revolution of the curve  $(a-x)y^2 = a^2x$  about its asymptote. 4

- (b) A function  $f$  is defined on  $\mathbf{R}$  by 3

$$f(x) = \begin{cases} C^2 x, & \text{if } x \leq 1 \\ 5Cx - 6, & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

Determine the value(s) of  $C$  so that  $f$  becomes continuous on  $\mathbf{R}$ .

- (c) Evaluate :  $\int \frac{3\sin x + 2\cos x}{3\cos x + 2\sin x} dx$  3

7. (a) Find the area of one arch of the cycloid  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  bounded by its base. 5

- (b) Evaluate  $\int \frac{(x^2 - 1)}{x^4 + x^2 + 1} dx$ . 3

- (c) Find the value of  $(0.98)^{5/2}$  upto 3 decimal places. 2

स्नातक उपाधि कार्यक्रम ( बी.डी.पी. )

सत्रांत परीक्षा

जून, 2013

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-01 : कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का 70%)

नोट : प्रश्न संख्या 1 करना जरूरी है। शेष प्रश्नों में से कोई चार प्रश्न कीजिए।

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं? अपने उत्तरों के कारण दीजिए : 10

(a) यदि एक  $\mathbf{R}$  से  $\mathbf{R}$  पर परिभाषित फलन  $f$  इस प्रकार है कि  $|f|$  संतत है, तो  $f$  भी संतत होगा।

(b)  $f(x) = x + \sin x$  द्वारा परिभाषित फलन  $f$ ,  
 $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  में एकदिष्ट है।

(c)  $\int_0^3 |x - 1| dx = \frac{3}{2}$

(d)  $\frac{d}{dx} \left[ \int_x^{e^x} \ln t dt \right] = xe^x - \ln x$

(e)  $y(x^2 + 4) = 2$  के तिर्यक् अनंतस्पर्शी होते हैं।

2. (a) यदि  $y = \ln[x + \sqrt{x^2 + 1}]$ , तब जाँच कीजिए कि  $(1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0$  सत्य है या नहीं। 4
- (b)  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ 2, & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$  द्वारा  $[-1, 1]$  पर परिभाषित फलन  $f$  के उपरि और निम्न समाकल ज्ञात कीजिए। इस प्रकार  $[-1, 1]$  पर  $f$  की समाकलनीयता की जाँच कीजिए। 4
- (c) जाँच कीजिए कि  $f(x) = \cos x - \cos 3x$  द्वारा परिभाषित फलन  $f$  आवर्ती है या नहीं। 2
3. (a) अन्तराल  $[0, 4]$  को 4 बराबर-बराबर लम्बाई वाले उप-अन्तरालों में विभाजित करके, सिम्पसन नियम द्वारा,  $\int_0^4 \frac{dx}{x+1}$  का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। 3
- (b)  $\sin^{-1}x$  को  $\cos^{-1}(\sqrt{1-x^2})$  के सापेक्ष अवकलित कीजिए। 2
- (c) यदि  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx \, dx$ ,  $n \geq 1$ , तब  $2I_{n+1} - I_n$  का मान ज्ञात कीजिए। इस तरह  $I_2$  का मान ज्ञात कीजिए। 5
4. वक्र  $x^2 = y^2(x+1)^3$  का अनुरेखण कीजिए। इसका अनुरेखण करने के लिए आपने जिन गुणों का प्रयोग किया है, उन्हें स्पष्ट रूप से बताइए। 10

5. (a) लैग्रांज माध्यम मान प्रमेय का कथन दीजिए। इस प्रमेय का प्रयोग करके  $1+x < e^x < 1+xe^x$ ,  $\forall x > 0$  सिद्ध कीजिए। 6
- (b)  $x$  के सापेक्ष  $(\tan x)^{\sec x} + (\sec x)^{\cot x}$  को अवकलित कीजिए। 4
6. (a) वक्र  $(a-x)y^2 = a^2x$  को अपनी अंनतस्पर्शी के प्रति घूर्णन करने से जनित घनाकृति का आयतन ज्ञात कीजिए। 4  
3
- (b) एक फलन  $f$ ,
- $$f(x) = \begin{cases} C^2 x, & \text{यदि } x \leq 1 \\ 5Cx - 6, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$$
- द्वारा  $\mathbf{R}$  पर परिभाषित है।  $C$  के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए  $f$ ,  $\mathbf{R}$  पर संतत है।
- (c)  $\int \frac{3\sin x + 2\cos x}{3\cos x + 2\sin x} dx$  का मूल्यांकन कीजिए। 3
7. (a) चक्रज  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  की एक चाप और चाप के आधार से घिरा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5
- (b)  $\int \frac{(x^2 - 1)}{x^4 + x^2 + 1} dx$  का मूल्यांकन कीजिए। 3
- (c)  $(0.98)^{5/2}$  का मान दशमलव के 3 स्थान तक ज्ञात कीजिए। 2