No. of Printed Pages : 8

MTE-07

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2013

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-07 : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Weightage 70%

Note : ***Q. no. 1*** *is* ***compulsory.*** *Attempt* ***any four*** *questions from the remaining. Calculators are not allowed.*

1. State whether the following statements are **true** or **false**. Give reasons for your answers. **2x5=10**

(a) The level surfaces of $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 25$ are circles with radius 5.

(b) The surface $f(x, y) = x^2 + y^2$ has a minimum at (0, 0).

(c) $\{(x, y) | \ 0 \leq y \leq 3x, \ 0 \leq x \leq 1\}$ is a region of both Type I and Type II.

(d) The set $\left\{ \left| \frac{x^2 - 1}{2x} \right| \ 0 < x < 1 \right\}$ is bounded below.

(e) If $f(x, y) = \tan\left(\frac{x^3 - 3y^3}{x^3 + 2y^3}\right)$,

then $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \tan(x^3 + y^3)$

2. (a) Evaluate the limits : 5

(i) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sin\left(1/x\right)}{e^{1/x} - 1}$$

(ii) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \tan 2x}{\ln \tan x}$$

(b) Using Lagranges multiplier method, find the extreme points of $z = xy$, subject to $x + y = 1$. 3

(c) Find $\frac{dw}{dt}$ at $t = \frac{\pi}{2}$, where 2

$w = x^2 + y^2 + 2x + 3y$, $x = \cos t$, $y = \sin t$.

3. (a) Integrate $f(x, y) = x^2 + y$ over the region bounded by $y = 2x^2$, x-axis, $x = 1/2$. 5

(b) Compute the Jacobian matrices using chain rule for $z = u^2 + v^2$ where $u = 2x + 7$, $v = 3x + y + 7$. 3

(c) Find domain and range of the function f 2

where $f(x, y) = \frac{2x^2 y^2}{x^4 + y^4}$.

4. (a) Find and classify the stationary points of $f(x, y) = y^2 - x^2 + 3xy$. 4

(b) Reverse the order of integration and integrate : 3

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^3} y \, dx dy$$

(c) Apply Green's theorem to find the area of the ellipse. 3

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 4.$$

5. (a) Find the two repeated limits at (0, 0) of 4

$$f(x, y) = \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}, \ (x, y) \neq (0, 0)$$

$$= \quad 0 \quad , (x, y) = (0, 0)$$

Also find the simultaneous limit, if it exists.

(b) Show that the functions 3

$$f(x, y) = y/x \text{ and } g(x, y) = \frac{x-y}{x+y} \text{ are}$$

functionally dependent. Find a functional relation between them.

(c) Find the second Taylor polynomial of the function, f given by 3

$f(x, y) = e^{x+2y}$ at $(-1, 1)$.

6. (a) Evaluate the integral of $f(x, y, z) = x + 2y - z$ over the cylinder bounded by $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ and $z = 1$. 5

(b) If $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & x = 0 = y \end{cases}$ 5

show that $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$

7. (a) Find the directional derivative of 4

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

at (0, 0) in the direction, $\theta = \pi/3$.

(b) Calculate the work done by a force $F = (x^2, y^2)$ in moving a particle along the circle given by $x = 1 + \cos t$, $y = 1 + \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. 3

(c) Show that the open sphere 5 with centre at (3, 1, 4) and radius 5 in $\mathbf{R}^3$ is contained in the open cube. 3

$P_1 = \{(x, y, z) ; |x - 3| < 5, |y - 1| < 5, |z - 4| < 5\}$ and P_1 is contained in the sphere with centre (3, 1, 4) and radius $5\sqrt{3}$.

एम.टी.ई-07

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2013

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-07 : उच्च फलन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

कुल का 70%

नोट : *प्र. स.1 **अनिवार्य** है। शेष में से **किन्हीं चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलैटरों का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।*

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन **सत्य** हैं या **असत्य**। अपने उत्तरों के कारण बताइए। **2x5=10**

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 25$ के स्तर पृष्ठ, त्रिज्या 5 वाले वृत्त हैं।

(b) पृष्ठ $f(x, y) = x^2 + y^2$ का (0, 0) पर एक निम्निष्ठ होता है।

(c) $\{(x, y) | 0 \leq y \leq 3x, 0 \leq x \leq 1\}$ टाईप I और टाईप II, दोनों प्रकार के प्रदेश हैं।

(d) समुच्चय $\left\{ \left| \frac{x^2-1}{2x} \right| 0 < x < 1 \right\}$ निम्नतः परिबद्ध है।

(e) यदि $f(x, y) = \tan\left(\frac{x^3 - 3y^3}{x^3 + 2y^3}\right)$, तब

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \tan(x^3 + y^3)$$ है।

2. (a) निम्नलिखित सीमाओं का मूल्यांकन कीजिए : 5

(i) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sin\left(1/x\right)}{e^{1/x} - 1}$

(ii) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \tan 2x}{\ln \tan x}$

(b) लग्रांज गुणांक विधि से $x + y = 1$ के अधीन $z = xy$ के चरम बिन्दु ज्ञात कीजिए। 3

(c) $\frac{dw}{dt}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $t = \frac{\pi}{2}$ पर 2

$w = x^2 + y^2 + 2x + 3y$, $x = \cos t$, $y = \sin t$ है।

3. (a) $y = 2x^2$, x-अक्ष, $x = 1/2$ द्वारा परिबद्ध प्रदेश पर 5
$f(x, y) = x^2 + y$ को समाकलित कीजिए।

(b) शृंखला नियम से $z = u^2 + v^2$ जहाँ $u = 2x + 7$, 3
$v = 3x + y + 7$ का जैकोबी अव्यूह ज्ञात कीजिए।

(c) फलन f का प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए, जहाँ 2

$$f(x, y) = \frac{2x^2 y^2}{x^4 + y^4}.$$

4. (a) $f(x, y) = y^2 - x^2 + 3xy$ के स्तब्ध बिंदु ज्ञात कीजिए और उन्हें वर्गीकृत कीजिए। 4

(b) निम्नलिखित समाकलन के क्रम में परिवर्तन करने के बाद, समाकलित कीजिए। 3

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^3} y \, dx dy$$

(c) ग्रीन प्रमेय लागू करके दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 4$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 3

5. (a) (0, 0) पर, निम्नलिखित फलन f, जहाँ, 4

$$f(x, y) = \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

$$= \quad 0 \quad , (x, y) = (0, 0)$$

की दो पुनरावृत्ति सीमाएँ ज्ञात कीजिए। यदि युगपत सीमा का अस्तित्व है तो, वह भी ज्ञात कीजिए।

(b) दिखाइए कि फलन $f(x, y) = y/x$ और $g(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ फलनिकत: आश्रित हैं। उनके बीच फलनिकन: संबंध ज्ञात कीजिए। 3

(c) $(-1, 1)$ पर $f(x, y) = e^{x+2y}$ द्वारा दिए गए फलन f का द्वितीय टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए। 3

6. (a) $x^2+y^2=4$, $z=0$ और $z=1$ द्वारा परिबद्ध बेलन पर $f(x, y, z)=x+2y-z$ के समाकल का मूल्यांकन कीजिए। 5

(b) यदि $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x, y)\neq(0, 0)\\ 0, & x=0=y\end{cases}$ 5

है, तब दिखाइए कि $f_{xy}(0, 0)=f_{yx}(0, 0)$.

7. (a) दिशा $\theta=\pi/3$ में $(0, 0)$ पर 4

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & (x, y)\neq(0, 0)\\ 0, & (x, y)=(0, 0)\end{cases}$$

का दिक अवकलज ज्ञात कीजिए।

(b) $x=1+\cos t$, $y=1+\sin t$, $0\leq t\leq 2\pi$ द्वारा दिए गए वृत्त के अनुदिश बल $F=(x^2, y^2)$ द्वारा एक कण को ले जाने में किया गया कार्य को ज्ञात कीजिए। 3

(c) दिखाइए कि, $(3, 1, 4)$ पर केन्द्र वाला और त्रिज्या 5 वाला $\mathbf{R}^3$ में स्थित, विवृत्त गोला, विवृत्त घन : 3

$P_1=\{(x, y, z)\ ;\ |x-3|<5,\ |y-1|<5,\ |z-4|<5\}$

में आविष्ट है और P_1, केन्द्र $(3, 1, 4)$ और त्रिज्या $5\sqrt{3}$ वाले गोले में आविष्ट है।