No. of Printed Pages : 8

MTE-6

00971

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2012

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-6 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt five questions in **all**. Question No. 7 is **compulsory**. Answer any four questions from questions no. **1** to **6**. Calculators are **not** allowed.*

1. (a) Let $S=\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$. Show that S is a ring with identity with the operations defined by : **4**

$(x, y)+(u, v)=(x+u, y+v)$;

$(x, y).(u, v)=(xu-yv, xv+yu)$.

(b) Define a relation S on $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ by (x_1, y_1) S (x_2, y_2) iff $3x_1+y_1=3x_2+y_2$. Show that S is an equivalence relation. What does each class represent geometrically ? **4**

(c) Let $G=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \ a, b, c, d, \in \mathbf{R}, ad \neq 0\right\}$. **2**

Let $H=\left\{\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \ b \in \mathbf{R}, b>0\right\}$. Is H a subgroup of G. Give reasons for your answer.

2. (a) Show that $\dfrac{Q[x]}{<x-5>} \cong Q$ as fields. 4

(b) Let G be a cyclic group with exactly 3 subgroups, {e}, G itself and a subgroup of order 7. Find the order of G. 2

(c) Write the permutation 4

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$ as a product

of disjoint cycles and then as a product of transpositions. Find the signature of F.

Further Let $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.

If there a $\sigma \epsilon S_8$ such that $\sigma f = g\sigma$? Give reasons for your answer.

3. (a) Prove that a cyclic group with only one generator can have at most two elements. 3

(b) Let $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ be the group of quaternious. 5

(i) Obtain [G, G], the commutator subgroup of G.

(ii) Find a subgroup N of G such that $[G, G] \underset{T}{\subsetneq} N$. Obtain G/N.

(c) Find the reminder obtained on dividing 7^{1000} by 11. 2

4. (a) Let $I = \left\{ \begin{pmatrix} 2n & t \\ 0 & 3m \end{pmatrix} \middle| \, n, m, t \in Z \right\}$. Check whether I is an ideal of $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in Z \right\}$. 2

(b) Let R be an integral domain with non-zero characteristic. If A is a proper ideal of R, show that R/A has the same characteristic as R. 5

(c) Show that the polynomial $2x^{10} - 25x^3 + 10x^2 - 30$ is irreducible in Q $[x]$. Is the polynomial $x^3 + 2x + 3$ irreducible over $Z_5\,[x]$. Justify your answer. 3

5. (a) Find the nil radical of Z_{16}. 2

(b) Prove that a group of order 35 is cyclic. 4

(c) Show that ϕ : $\mathbf{R}[x] \to \mathbf{R}$ defined by $\phi(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n) = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ is a ring hormomorphism. Why is Ker ϕ a principal ideal ? Find its generator. 4

6. (a) Let $\mathbf{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in Z\}$ and $S = \{(a, b, c) \in \mathbf{R} \mid a + b = c\}$. Check whether S is a subring of $\mathbf{R}$. 3

(b) Define an operation $*$ on **R** by $a*b = a + b + 2$. Is this a binary operation on **R** ? Obtain the identity element, if it exists. Also obtain x^{-1}, if it exists, for $x \in \mathbf{R}$. **3**

(c) Give all maximal ideals of Z_{12}. **4**

7. Which of the following statements are true ? Give reasons for your answers : **10**

   (a) There exists a non-abelian group of order 121.

   (b) Characteristic of a Boolean ring R, i.e., $x^2 = x$ for all $x \in R$, is 2.

   (c) There is a field with 24 elements.

   (d) Every field is a Euclidean domain.

   (e) Every group has exactly one element stistying the equation $x^2 = x$.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा
जून, 2012

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.- 6 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *कोई भी **पाँच** प्रश्न कीजिए। प्रश्न संख्या 7 जरूरी है। प्रश्न संख्या 1 से 6 में से कोई भी **चार** प्रश्न कीजिए। कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।*

---

1. (a) मान लीजिए $S=\{(x,\ y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ दिखाइए कि नीचे परिभाषित संक्रियाओं से S सर्वसमिका वाला एक वलय होता है $(x, y)+(\mathrm{u}, \mathrm{v})=(x+\mathrm{u}, y+\mathrm{v})$; $(x, y).(\mathrm{u}, \mathrm{v})=(x\mathrm{u}-y\mathrm{v}, x\mathrm{v}+y\mathrm{u})$ 4

   (b) $(x_1, y_1)\ \mathrm{S}\ (x_2, y_2)$ से $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ पर संबंध S परिभाषित कीजिए, यदि और केवल यदि $3x_1+y_1=3x_2+y_2$, दिखाइए कि S एक तुल्यता संबंध है। ज्यामितीय रूप से प्रत्येक वर्ग क्या निरूपित करता है। 4

   (c) मान लीजिए $G=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \ a, b, c, d, \in R, ad \neq 0\right\}$. 2

   मानलिजिए $H=\left\{\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \ b \in \mathbf{R}, b>0\right\}$ क्या H, G का एक उप समूह है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

2. (a) दिखाइए कि फील्ड होते हुए. $\dfrac{Q[x]}{< x-5 >} \cong Q$ 4

(b) मान लीजिए G, ठीक-ठीक 3 उपसमूहों, का एक चक्रीय समूह, है, {e}, स्वयं G और वर्ग 7 वाला एक उप समूह है। G का कोटी ज्ञात कीजिए। 2

(c) क्रमचय $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में और तब पक्षांतरणों के गुणनफल के रूप में लिखिए। F का चिह्नक (signature) ज्ञात कीजिए। 4

मान लीजिए $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ क्या यहाँ एक $\sigma \epsilon S_8$ है जिससे कि $\sigma f = g\sigma$? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

3. (a) सिद्ध कीजिए कि केवल एक जनक चक्रीय समूह का अधिक से अधिक दो अवयव हो सकते हैं। 3

(b) मान लीजिए $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ चतुष्टयों का समूह हैं। 5

(i) G का क्रमविनिमयक उपसमूह [G, G] प्राप्त कीजिए।

(ii) G का एक ऐसा उपसमूह N ज्ञात कीजिए जिससे कि $[G, G] \underset{T}{\subsetneq} N$.

G/N प्राप्त कीजिए।

(c) 7^{1000} के 11 से विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल है। 2

4. (a) मान लीजिए $I = \left\{ \begin{pmatrix} 2n & t \\ 0 & 3m \end{pmatrix} \middle| \; n, m, t \in Z \right\}$. **2**

जाँच कीजिए कि क्या I, $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c, d \in Z \right\}$

का एक गुणजावली (ideal) हैं।

(b) मान लीजिए R, शून्येतर अभिलक्षणिक वाला एक पूर्णांकीय प्रांत हैं। यदि A, R का एक उचित गुणजावली हो, तो दिखाइए कि R/A को वही अभिलक्षणिक होती है जो R का है। **5**

(c) दिखाइए कि बहुपद $2x^{10} - 25x^3 + 10x^2 - 30$, $Q[x]$ में अखंडनीय हैं। क्या बहुपद $x^3 + 2x + 3$, $\mathbf{Z}_5[x]$ पर अखंडनीय हैं? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। **3**

5. (a) Z_{16} का शून्य कर्णी ज्ञात कीजिए। **2**

(b) सिद्ध कीजिए कि क्रम 35 का एक समूह चक्रीय होता हैं। **4**

(c) दिखाइए कि **4**

$\phi(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n) = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$

से परिभाषित $\phi : \mathbf{R}[x] \rightarrow \mathbf{R}$ एक वलय समाकारिता (homomorphism) हैं। क्यों Ker ϕ, एक मुख्य गुणजावली है? इसका जनक ज्ञात कीजिए।

6. (a) मान लीजिए : $\mathbf{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbf{Z}\}$ और $S = \{(a, b, c) \in \mathbf{R} \mid a + b = c\}$. बताइए कि S, **R** का एक उपवलय है या नहीं। 3

(b) **R** पर संक्रिया * को $a*b = a + b + 2$ से परिभाषित कीजिए। क्या यह **R** पर एक द्वि-आधारी संक्रिया है। यदि इसका अस्तित्व है तो इसका तत्समक (identity) अवयव ज्ञात कीजिए। यदि इसका अस्तित्व है तो $x \in \mathbf{R}$ के लिए x^{-1} भी प्राप्त कीजिए। 3

(c) Z_{12} के सभी उच्चिष्ठ गुणजावली ज्ञात कीजिए। 4

7. निम्नलिखित कथनों में कौन-कौन कथन सत्य हैं? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 10

(a) क्रम 121 का एक अनाबेली समूह होता है।

(b) बूलीय वलय R का अभिलक्षणिक अर्थात् सभी $x \in R$ के लिए $x^2 = x$, 2 है?

(c) 24 अवयवों वाला एक क्षेत्र होता है।

(d) प्रत्येक क्षेत्र एक यूक्लिडीय प्रांत है।

(e) प्रत्येक समूह का ठीक-ठीक एक अवयव होता है, जो समीकरण $x^2 = x$ को संतुष्ट करता है?
