BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2012

02341

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-8 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage 70%)

Note : *Q. No. **1** is **compulsory.** Attempt any **four** questions out of the remaining questions **2-7.** Calculators are not allowed.*

1. State whether the following statements are ***True*** or ***False.*** Justify your answer with the help of a short proof or a counter example : **5x2=10**

(a) The differential equation :

$$\left(y^2e^{xy^2}+5x\right)dx+\left(2xye^{xy^2}-7y\right)dy=0,$$

is non-linear, nonhomogeneous and exact.

(b) The complementary function of the differential equation $x^2y''-6y=1+\ln|x|$ is $Ax^{-2}+Bx^3$

(c) One form of the complementary solution of the equation, $\frac{\partial z}{\partial x}-2\frac{\partial z}{\partial y}=3z$,

is $e^{\frac{3}{2}y}f(y+2x)$.

(d) The partial differential equations $f(x, y, p) = 0$ and $g(x, y, q) = 0$, are compatible if $f_p g_x - f_y g_q = 0$.

(e) The particular integral of the differential equation $(3D^2 - 4D')z = 7e^{2x-5y}$, is $(7/8)\, e^{2x-5y}$.

2. Solve the following differential equations :

(a) $\frac{dy}{dx} = \left[y^3 \Big/ \left(e^{2x} + y^2\right) \right]$ 3

(b) $\left(\frac{y}{x} secy - tany\right)dx + (secy\ ln x - x)dy = 0$. 3

(c) $(x^2D^2 - y^2D'^2 + xD - yD')z = 6xy^2$. 4

3. (a) Suppose that a thermometer having a reading of 75°F inside a house is placed out side where the air temperature is 15°F. Two minutes later it is found that the thermometer reading is 30°F. Find the temperature reading $T(t)$ of the thermometer at any time t. 4

(b) Solve the partial differential equation $(D^2 + DD^1 + D + D^1 + 1)z = e^{3x+4y}$. 3

(c) Find the general solution of the following system of equations : 3

$$\frac{dx}{yz} + \frac{dy}{-xz} = \frac{dz}{xy\left(x^2+y^2\right)}.$$

4. (a) Solve : $x\left(p^2+1\right) = 2yp;\ p = \frac{dy}{dx}$. 3

(b) By changing the independent variable solve : 5

$$\frac{d^2y}{dx^2} + tanx\ \frac{dy}{dx} + y\cos^2 x = 0.$$

(c) Determine the two independent solutions of the equation : $x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = x$. 2

5. (a) Solve : $dx - xy\ (1+xy^2)\ dy = 0$. 4

(b) Using the method of variation of parameters solve the following differential equation : 4

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = sec\,x\ tan\,x.$$

(c) Find a homogeneous linear differential equation with constant coefficients that is satisfied by $y = 2x\ e^{-3x}\ cos\ 4x$. 2

6. (a) Solve : $(D^2-4D+4)y=x\,e^{2x}\cos 2x$. 3

(b) Using the transformation $u^2=x+y$, $v^2=x-y$, reduce the partial differential equation : 5

$(x+y)(p+q)^2+(x-y)(p-q)^2=1$,

to a form F (P, Q) = 0, where,

$P=\frac{\partial z}{\partial u}$, $Q=\frac{\partial z}{\partial v}$ and obtain its complete integral.

(c) For what values of α the partial differential equation : 2

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\alpha x^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

will be (i) hyperbolic (ii) parabolic (iii) elliptic ?

7. (a) Using Jacobis' method, solve the equation $z^3=pqxy$. 4

(b) Determine the solution of the one-dimensional heat equation : 6

$$\frac{\partial u}{\partial t}=K^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

subject to the boundry conditions $u(0,\ t)=u(l,\ t)=0,\ t>0$ and the initial condition $u(x,\ 0)=x$, l being the length of the rod.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2012

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-8 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *प्रश्न सं. 1* ***अनिवार्य*** *है। शेष प्रश्न 2 से 7 में से* ***किन्हीं चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति* ***नहीं*** *है।*

---

1. बताइए निम्नलिखित कथन ***सत्य*** है या ***असत्य***। लघु उपपत्ति या प्रत्युदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। **5x2=10**

(a) अवकल समीकरण :

$$\left(y^2 e^{xy^2} + 5x\right)dx + \left(2xy e^{xy^2} - 7y\right)dy = 0,$$

अरैखिक, असमघात व यथातथ है।

(b) अवकल समीकरण $x^2y'' - 6y = 1 + \ln|x|$ का पूरक फलन $Ax^{-2} + Bx^3$ है।

(c) समीकरण $\frac{\partial z}{\partial x} - 2\frac{\partial z}{\partial y} = 3z$, के पूरक हल का एक रूप $e^{\frac{3}{2}y} f(y+2x)$ है।

(d) आंशिक अवकल समीकरण $f(x, y, p) = 0$ और $g(x, y, q) = 0$ सुसंगत होंगे यदि $f_p g_x - f_y g_q = 0$.

(e) अवकल समीकरण $(3D^2 - 4D')z = 7e^{2x-5y}$ का विशेष समाकल $(7/8)\, e^{2x-5y}$ है।

2. निम्नलिखित अवकल समीकरणों के हल प्राप्त कीजिए :

(a) $\frac{dy}{dx} = \left[y^3 \Big/ \left(e^{2x} + y^2\right) \right]$ 3

(b) $\left(\frac{y}{x} secy - tany\right)dx + (secy\ lnx - x)dy = 0$. 3

(c) $(x^2D^2 - y^2D'^2 + xD - yD')z = 6xy^2$. 4

3. (a) घर के अंदर रखे एक थर्मामीटर को जो 75°F तापमान दिखा रहा है, घर के बाहर रखा गया जहाँ वायु तापमान 15°F है। दो मिनट के बाद देखा गया कि थर्मामीटर 30°F तापमान दिखा रहा है। किसी भी समय t पर थर्मामीटर द्वारा दिखाया गया तापमान $T(t)$ ज्ञात कीजिए। 4

(b) आंशिक अवकल समीकरण 3

$(D^2 + DD^1 + D + D^1 + 1)z = e^{3x+4y}$ का हल प्राप्त कीजिए।

(c) निम्नलिखित समीकरण निकाय का व्यापक हल प्राप्त कीजिए : 3

$$\frac{dx}{yz} + \frac{dy}{-xz} = \frac{dz}{xy\left(x^2+y^2\right)}.$$

4. (a) हल कीजिए : $x\left(p^2+1\right) = 2yp;\ p = \frac{dy}{dx}$. 3

(b) स्वतंत्र चर परिवर्तन द्वारा समीकरण : 5

$$\frac{d^2y}{dx^2} + tanx\ \frac{dy}{dx} + y\cos^2 x = 0$$ का हल प्राप्त कीजिए।

(c) समीकरण : $x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = x$ के दो स्वतंत्र हल प्राप्त कीजिए। 2

5. (a) हल कीजिए : $dx - xy\ (1+xy^2)\ dy = 0$. 4

(b) प्राचल विचरण विधि द्वारा निम्नलिखित समीकरण का हल प्राप्त कीजिए : 4

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = sec\,x\ tan\,x.$$

(c) अचर गुणांक वाला ऐसा समघात रैखिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जो $y = 2x\ e^{-3x}\ cos\ 4x$ द्वारा संतुष्ट होता है। 2

6. (a) हल कीजिए : $(D^2-4D+4)y=x\,e^{2x}\,cos\,2x.$ 3

(b) रूपान्तरण $u^2=x+y$ और $v^2=x-y$ का प्रयोग करके आंशिक अवकल समीकरण : 5

$(x+y)(p+q)^2+(x-y)(p-q)^2=1,$

को F (P, Q) = 0 के रूप में परिवर्तित कीजिए, जहाँ

$P=\frac{\partial z}{\partial u}$ और $Q=\frac{\partial z}{\partial v}$ हैं, और इसका पूर्ण समाकल भी ज्ञात कीजिए।

(c) α के किन मानों के लिए आंशिक अवकल समीकरण : 2

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\alpha x^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

(i) अतिपरवलयिक (ii) परवलयिक (iii) दीर्घवृत्तीय होगा ?

7. (a) जैकोबी विधि द्वारा समीकरण $z^3=pqxy$ का हल प्राप्त कीजिए। 4

(b) एक विम ऊष्मा समीकरण : 6

$$\frac{\partial u}{\partial t}=K^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

का हल परिसीमा प्रतिबंधों $u(0, t)=u(l, t)=0,\ t>0$ और आदि प्रतिबंध $u(x, 0)=x$ के अधीन प्राप्त कीजिए जहाँ l छड़ी की लंबाई है।