No. of Printed Pages : **8**

MTE-02

02501

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2012

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

Time : **2** *hours*   *Maximum Marks* : **50**

(Weightage **70%***)*

Note : *Q. No. 7 is* ***compulsory****. Attempt* ***any four*** *questions from Q. No.* **1** *to* **6***. Calculators are not allowed.*

---

1. (a) Show that the vectors $V_1 = (2i, 1, 0)$, $V_2 = (2, -1, 1)$ $V_3 = (0, 1+i, 1-i)$ form a basis for $\mathbb{C}^3$. Also find the coordinates of the vector $(1, 0, 1)$ in the ordered basis $\{V_1, V_2, V_3\}$. **4**

(b) Let T be a linear operator on R^3, defined by $T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3)$. Is T invertible ? If so, find $T^{-1}(x_1, x_2, x_3)$ for $(x_1, x_2, x_3) \epsilon \mathbf{R}^3$. If T^{-1} does not exist, find the minimal polynomial of T. **6**

2. (a) Consider the basis $B = \{ (1, -1, 3), (0, 1, -1), (0, 3, -2) \}$ of $\mathbf{R}^3$. Find the dual basis of B. **3**

(b) Give an example, with justification, of a 2×2 matrix which is *not* orthogonally similar to $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ **2**

(c) Consider the real vector space **5**

$W = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid \text{ai} \in R\}$.

Check whether or not W_1 and W_2 are subspaces of W, where

$W_1 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_0 = a_2, \text{ ai } \in R\}$

$W_2 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \text{ ai} \in R\}$

Further, for those that are subspaces, also find their dimensions.

3. (a) Find the eigenvalues, and bases for the eigenspaces, of the matrix **4**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) A scientist has placed three types of bacteria, labelled B_1, B_2 and B_3 in a culture dish, along with certain quantities of nutrients, labelled N_1, N_2 and N_3. The amounts of each nutrient that can be consumed by each bacterium in a 24-hour period is given in the table below. **6**

	B_1	B_2	B_3
N_1	4	2	6
N_2	3	1	2
N_3	7	5	2

The table tells us, for example, that each bacterium B_1 can consume 4 units of N_1, 3 units of N_2 and 7 units of N_3 in a 24-hour period.

Set up a system of linear equations to find out how many bacteria of each type can be supported daily by 4200 units of N_1, 1900 units of N_2 and 4700 units of N_3. Further, solve this system of equations by using the Gaussian elimination method.

4. (a) Apply the Cayley-Hamilton theorem to find A^{-1}, where $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 4

(b) Let V be the real vector space of polynomial functions of degree at most from **R** into **R** with inner product on V defined by 6

$$< f, g > = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt .$$

Apply the Gram-Schmidt orthogonalization process to the basis $\{1-t, 1+t, t^2\}$ of V. Would you get the same orthogonal basis if you applied the process on the basis $\{1+t, 1-t, t^2\}$? Give reasons for your answer.

5. Consider the quadratic form : 10

$Q(x) = 3(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2yz + 2zx.$

Find its orthogonal canonical reduction and its principal axes. Hence identify the geometric object represented by $Q(x) = 10$.

6. (a) Let $f : R \to R$ and $g : R \to R$ be functions defined by $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ and $g(x) = x^2 + 1$. **2**

Find gof. Check whether it is one-one and onto also.

(b) Let V be the linear span of $\{ (1, 0, 1), (-1, 1, 0), (0, 0, 1) \}$. Complete $\{ (2, 3, 1), (-1, 0, 2) \}$ to form a basis of V. **3**

(c) Find the adjoint of the matrix given in Q. 3 (a) above. Hence find the inverse of the matrix. **5**

7. Which of the following statements are *true* and which are *false* ? Justify your answer. **10**

(a) Similar matrices have the same minimal polynomial.

(b) Every linear transformation maps a linearly dependent set of vectors onto a linearly dependent set of vectors.

(c) If the eigenvalues of an operator have absolute value 1, then the operator must be unitary.

(d) For any two non-empty sets A and B, $A \subseteq A \times B$.

(e) A three - dimensional vector space has only two distinct proper subspaces.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2012

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे | *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का 70%)

---

*नोट : प्रश्न संख्या 7 करना **ज़रूरी** है। प्रश्न संख्या 1 से 6 में से **किन्हीं चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलक्युलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।*

---

1. (a) दिखाइए कि सदिश $V_1 = (2i, 1, 0)$, $V_2 = (2, -1, 1)$ $V_3 = (0, 1+i, 1-i)$ $\mathbb{C}^3$ के लिए आधार बनाते हैं। क्रमित आधार $\{V_1, V_2, V_3\}$ में सदिश (1, 0, 1) के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए। **4**

   (b) मान लिजिए T, **6**

   $T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3)$ द्वारा परिभाषित $\mathbf{R}^3$ पर एक रैखिक संकारक है। क्या T व्युत्क्रमणीय है? यदि है तो $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ के लिए $T^{-1}(x_1, x_2, x_3)$ ज्ञात कीजिए। यदि T^{-1} का अस्तित्व नहीं है तो T का अल्पिष्ठ बहुपद ज्ञात कीजिए।

2. (a) $\mathbf{R}^3$ का आधार $B = \{ (1, -1, 3), (0, 1, -1), (0, 3, -2) \}$ लीजिए। B का द्वैत आधार ज्ञात कीजिए। **3**

(b) एक ऐसे 2×2 आव्यूह का पुष्टियुक्त उदाहरण दीजिए जो लांबिकत: $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ के समान **न** हो। **2**

(c) वास्तविक सदिश समष्टि **5**

$W = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid ai \in R\}$ लीजिए। जाँच कीजिए कि W_1 और W_2, W की उपसमष्टियाँ हैं या नहीं, जहाँ

$W_1 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 | a_0 = a_2,\ ai \in R\}$
$W_2 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0, ai \in R\}$

इसके आगे, जो उपसमष्टियाँ हैं, उनकी विमाएँ भी ज्ञात कीजिए।

3. (a) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ की आइगेनसमष्टियों के आइगेनमान और आधार ज्ञात कीजिए। **4**

(b) एक वैज्ञानिक ने एक संवर्ध प्लेट में B_1, B_2 और B_3 नामित तीन प्रकार की बैक्टीरिया और साथ में N_1, N_2 और N_3 नामित पोषक तत्वों की कुछ मात्राएँ रखीं। 24 घंटे की अवधि में प्रत्येक बैक्टीरिया द्वारा खाए गए पोषक तत्वों की मात्राएँ नीचे तालिका में दी गई है : **6**

	B_1	B_2	B_3
N_1	4	2	6
N_2	3	1	2
N_3	7	5	2

उदाहरण के लिए इस तालिका से पता चलता है कि, B_1 बैक्टीरिया 24 घण्टे में N_1 की 4 इकाइयाँ N_2 की 3 इकाईयाँ और N_3 की 7 इकाइयाँ खा सकता है। प्रत्येक प्रकार के कितने बैक्टीरिया प्रतिदिन N_1 की 4200 इकाइयाँ, N_2 की 1900 इकाइयाँ और N_3 की 4700 इकाइयाँ, खा सकते हैं, इसका पता लगाने के लिए रैखिक समीकरण निकाल दीजिए। इसके आगे, इस समीकरण निकाय को हल करने के लिए गाउसीय निराकरण विधि का इस्तेमाल कीजिए।

4. (a) A^{-1} को ज्ञात करने के लिए केली-हैमिल्टन प्रमेय लागू कीजिए जहाँ $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 4

(b) मान लीजिए V **R** से **R** में अधिक से अधिक 2 घात वाले बहुपद फलनों की वास्तविक सदिश समष्टि है। V पर $< f, g > = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$ द्वारा परिभाषित आंतर गुणनफल लीजिए V के आधार $\{1-t, 1+t, t^2\}$ पर ग्राम-शिमट लांबिकीकरण प्रक्रिया का प्रयोग कीजिए। यदि आप यही प्रक्रिया V के आधार $\{1+t, 1-t, t^2\}$ पर लागू करेंगे, तो क्या आपको वही लांबिक आधार प्राप्त होगा? अपने उत्तर के कारण बताइए। 6

5. द्विघाती समघात 10

$Q(x) = 3(x^2+y^2+z^2)+2xy+2yz+2zx$ लीजिए। इसका लांबिक विहित समानयन और इसके मुख्य अक्ष ज्ञात कीजिए। इस तरह $Q(x)=10$ द्वारा निरूपित ज्यामितीय वस्तु को पहचानिए।

6. (a) मान लीजिए $f: R \to R$ और $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ 2

और $g(x) = x^2 + 1$ द्वारा परिभाषित फलन हैं। gof ज्ञात कीजिए इसके आगे, जाँच कीजिए कि क्या यह एकैकी और आच्छादी है या नहीं।

(b) मान लीजिए V 3

$\{(1,0,1), (-1,1,0), (0,0,1)\}$ की रैखिक विस्तृति है। V का आधार बनाने के लिए $\{(2, 3, 1), (-1, 0, 2)\}$ को पूरा कीजिए।

(c) ऊपर 3 (a) में दिए गए आव्यूह का सहखंडज ज्ञात कीजिए। इस तरह, आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। 5

7. निम्नलिखित में से कौन से कथन ***सत्य*** हैं और कौन से ***असत्य*** हैं? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 10

(a) समरूप आव्यूहों के अल्पिष्ठ बहुपद समान होते हैं।

(b) किसी भी रैखिक रूपांतरण के तहत् एक रैखिकत: आश्रित सदिशों के समुच्चय का प्रतिबिंब एक रैखिकत: आश्रित: सदिशों का समुच्चय होता है।

(c) यदि किसी संकारक के सभी आइगेनमानों के निरपेक्ष मान 1 हों, तो संकारक ऐकिक होगा।

(d) किन्हीं दो अरिक्त समुच्चयों A और B के लिए $A \subseteq A \times B$.

(e) एक त्रिविमीय सदिश समष्टि की केवल दो अलग-अलग उचित उपसमष्टियाँ होती हैं।