No. of Printed Pages : 8 **PHE–14**

BACHELOR OF SCIENCE (B. SC.)
Term-End Examination
December, 2023

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS—III

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note **:** (*i*) *Attempt all questions.*

(*ii*) *The marks for each question are indicated against it.*

(*iii*) *Symbols have their usual meanings.*

---

1. Attempt any *five* parts : 5×2=10

(a) Show that the matrix :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3-2i \\ 3+2i & 4 \end{pmatrix}$$

is Hermitian.

(b) Determine the eigen values of the following matrix :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Define symmetric and antisymmetric tensors.

(d) Show that $f(z) = z^2$ is analytic in the entire z-plane.

(e) Obtain the singular points for the function :

$$f(z) = \frac{1}{z^2\left(z^2 + 9\right)}$$

(f) Determine the Laplace transform of the function e^{at} for $s > a$.

(g) Using the Rodrigue's formula for Legendre polynomials :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n$$

Obtain $P_2(x)$.

(h) Find the Fourier transform of :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } |x| < a \\ 0 & \text{for } |x| > a \end{cases}$$

2. Attempt any *two* parts : 2×5=10

(a) Determine the eigen values and eigen vectors of the following matrix :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$$

(b) Show that every eigen value of a unitary matrix is of unit modulus.

(c) Show that the roots of $z^4 - 1 = 0$ form a cyclic group of order 4.

3. Attempt any *two* parts : 2×5=10

(a) Prove that $u = e^{-x} \left(x \sin y - y \cos y\right)$ is harmonic.

(b) Using Cauchy's integral formula, evaluate the following integral :

$$\oint_C \frac{4-3z}{z(z-1)(z-2)} dz$$

where C is the circle : $|z| = \frac{3}{2}$.

(c) Obtain the Taylor series expansion of the function $\cos^2 z$ about $z = 0$.

4. (a) Calculate the inverse Laplace transform of the function : 5

$$\frac{s}{(s-1)^2 - 9}$$

(b) Determine the Fourier cosine integral representation of the function :

$$f(x) = \begin{cases} q & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

where q is a positive constant. 5

Or

Using Laplace transform, solve the initial value problem :

$$y'' - 4y' + 4y = 64 \sin 2t$$

given that $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$. 10

5. Answer any *two* parts : 2×5=10

(a) Expand the function $f(x) = x^2$ in a series of the form $\sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(x)$.

(b) Using the relation :

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\ \Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

show that $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ x^{-\frac{1}{2}} \sin x$.

(c) Using the generating function for Hermite polynomials :

$$e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

show that :

$$H_n(x) = (-1)^n H_n(-x).$$

PHE–14

विज्ञान स्नातक (बी. एस.-सी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2023

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ—III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : (*i*) *सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।*

(*ii*) *प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं।*

(*iii*) *प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।*

---

1. कोई ***पाँच*** भाग हल कीजिए : $5 \times 2 = 10$

(क) सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित आव्यूह हर्मिटी है :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3-2i \\ 3+2i & 4 \end{pmatrix}$$

(ख) निम्नलिखित आव्यूह के आइगेन मान परिकलित कीजिए :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(ग) सममित और प्रतिसममित टेन्सर की परिभाषा लिखिए।

(घ) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z)=z^2$ सर्वत्र z–समतल में विश्लेषिक है।

(ङ) फलन $f(z)=\dfrac{1}{z^2\left(z^2+9\right)}$ का विचित्र बिन्दु प्राप्त कीजिए।

(च) $s>a$ के लिए फलन e^{at} का लाप्लास रूपांतर ज्ञात कीजिए।

(छ) लेजान्ड्र बहुपदों के रोड्रिगेज सूत्र

$$\mathrm{P}_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$$

का उपयोग कर $\mathrm{P}_2(x)$ प्राप्त कीजिए।

(ज) फलन :

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<a \text{ के लिए}\\ 0 & |x|>a \text{ के लिए}\end{cases}$$

का फूरिये रूपांतर प्राप्त कीजिए।

2. कोई **दो** भाग हल कीजिए : 2×5=10

(क) निम्नलिखित आव्यूह के आइगेन मान और आइगेन सदिश प्राप्त कीजिए :

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -5 & -5\end{pmatrix}$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि ऐकिक आव्यूह का प्रत्येक आइगेन मान एकक मापांक वाला होता है।

(ग) सिद्ध कीजिए कि $z^4 - 1 = 0$ के मूल (roots) कोटि 4 वाला एक चक्रीय समूह बनाते हैं।

3. कोई **दो** भाग हल कीजिए : 2×5=10

(क) सिद्ध कीजिए कि $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ एक प्रसंवादी फलन है।

(ख) कौशी समाकल सूत्र का उपयोग कर, निम्नलिखित समाकल को हल कीजिए :

$$\oint_C \frac{4-3z}{z(z-1)(z-2)} dz$$

जहाँ C एक वृत्त है : $|z| = \frac{3}{2}$।

(ग) $z = 0$ के प्रति $\cos^2 z$ का टेलर श्रेणी प्रसार प्राप्त कीजिए।

4. (क) फलन $\frac{s}{(s-1)^2 - 9}$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर परिकलित कीजिए। 5

(ख) निम्नलिखित फलन :

$$f(x) = \begin{cases} q & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

का फूरिये कोसाइन समाकल निरूपण ज्ञात कीजिए, यहाँ q एक धन अचर है। 5

अथवा

लाप्लास रूपांतरण का उपयोग कर, निम्नलिखित आदि मान समस्या को हल कीजिए : 10

$$y'' - 4y' + 4y = 64\sin 2t$$

दिया है : $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ ।

5. कोई **दो** भाग हल कीजिए : 2×5=10

(क) $f(x) = x^2$ का प्रसार $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}_k \mathrm{P}_k(x)$ के रूप की श्रेणी में कीजिए।

(ख) निम्नलिखित संबंध :

$$\mathrm{J}_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\ \Gamma\ (m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

का उपयोग कर सिद्ध कीजिए कि :

$$\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ x^{-\frac{1}{2}} \sin x$$

(ग) हर्मिट बहुपदों के जनक फलन :

$$e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{H}_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

का उपयोग कर सिद्ध कीजिए :

$$\mathrm{H}_n(x) = (-1)^n\, \mathrm{H}_n(-x)$$