

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

**Term-End Examination
December, 2023**

MTE-13 : DISCRETE MATHEMATICS

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

Note : Attempt **five** questions in all. Q. No. 7 is compulsory. Answer any **four** questions from Question Nos. 1 to 6. Calculators are not allowed. All the symbols used have their usual meaning.

1. (a) How many partitions of $2n+1$ are there which have only the numbers 1 or 2 as parts ? 2

- (b) Find the sum of the series $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+1)^3}{r!}$, using an exponential generating function. 4

- (c) Draw a connected planar 3-regular graph with 8 vertices. How many regions are there in any plane drawing of this graph ? 4

2. (a) Solve the following recurrence relation by the method of telescoping sums : 3

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + (n-1)\{(n-1)!\}, (n \geq 1), \alpha_0 = 0.$$

- (b) A box contains 4 violet and 6 orange balls. Five balls are selected at random. What is the probability that out of the selected balls at least 3 are orange ? 3

- (c) Check whether the following argument is valid : 4

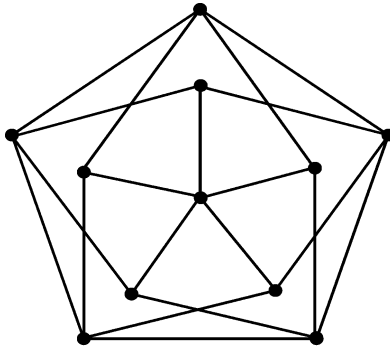
$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ s \rightarrow r \\ \frac{p \vee s}{\therefore q \vee r} \end{array}$$

3. (a) Two unbiased dice are thrown. Find the probability that the number on the first dice is less than that on the second dice. 2

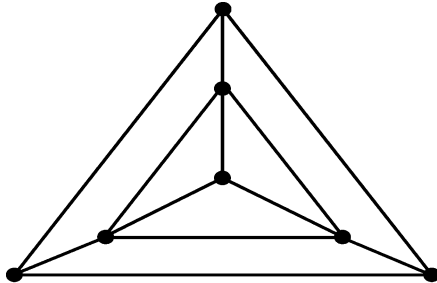
- (b) Write down the truth table for : 3

$$(P \wedge Q) \vee (P \rightarrow \sim R)$$

- (c) Check whether the following graph is Hamiltonian or not : 5



4. (a) Write the negation, converse and contrapositive of the following statement : 3
 “Every continuous function is integralde.”
- (b) If $F(z)$ is the generating function of the sequence $\{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$, then what is the generating function of the sequence $\{0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$? 3
- (c) Prove that every tree is bipartite. Is the converse true ? Justify. 4
5. (a) Give a direct proof of the statement : 2
 “If one of m and n is an even natural number, then $m \cdot n$ is also even.”
- (b) What is the coefficient of x^{33} in the expansion of $(1 + x^3 + 2x^{15})^{100}$? 3
- (c) Find $\delta(G), \Delta(G)$ and $\chi(G)$ for the following graph G : 5



6. (a) How many permutations are there of the letters taken all at a time of the word "INTRODUCTION" ? 2

- (b) Let $f(n) = 4n^2 - 4n + 1$ and

$$g(n) = \begin{cases} 1 & , \text{ if } n = 1 \\ g(n-1) + 8n - 8, & \text{ if } n > 1 \end{cases}$$

using the principle of mathematical induction, prove that $f(n) = gn$ for all $n \geq 1$. 3

- (c) Solve the recurrence relation : 5

$$a_n + a_{n-1} - 12a_{n-2} = 8 \cdot 3^n \quad (n \geq 2)$$

7. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answers : 10

- (a) The number of partitions of 6 is 11.

- (b) The generating function of the recurrence relation $a_n - 5a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$ is

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-4)}.$$

- (c) The negation of the statement $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ is $(p \wedge q) \rightarrow r$.

- (d) The graph $K_{5,6}$ is Hamiltonian.

- (e) There exists a connected graph on 20 vertices and 18 edges.

MTE-13

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2023

एम.टी.ई.-13 : विविक्त गणित

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : कुल पाँच प्रश्न हल कीजिए। प्रश्न सं. 7 करना अनिवार्य है। प्रश्न सं. 1 से 6 तक किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरों के प्रयोग की अनुमति नहीं है। प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

1. (क) $2n+1$ के ऐसे कितने विभाजन हैं जिनके भाग केवल 1 या 2 हैं ? 2

(ख) चरघातांकी जनक फलन का प्रयोग करके, श्रेणी

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+1)^3}{r!} \text{ का योगफल ज्ञात कीजिए। } 4$$

(ग) 8 शीर्षों वाला एक संबद्ध समतलीय 3-नियमित ग्राफ बनाइए। इसके किसी समतल रेखाचित्र में कितने प्रदेश होंगे ? 4

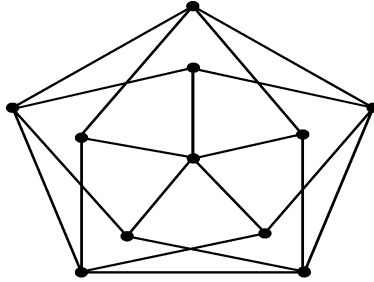
2. (क) निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध को अंतःसर्पी योगफल विधि से हल कीजिए : 3

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)\{(n-1)!\}, (n \geq 1), a_0 = 0$$

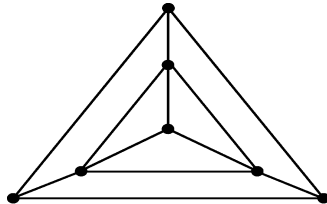
- (ख) एक संदूक में 4 बैंगनी और 6 नारंगी गेंदें हैं। 5 गेंदों को यादृच्छया चुना जाता है। क्या प्रायिकता है कि चुनी हुई गेंदों में से कम से कम 3 गेंदें नारंगी रंग की हों ? 3
- (ग) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित तर्क वैध है या नहीं : 4

$$\begin{array}{l}
 p \rightarrow q \\
 s \rightarrow r \\
 \frac{p \vee s}{\therefore q \vee r}
 \end{array}$$

3. (क) दो अनभिन्नत पासे फेंके जाते हैं। इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पहले पासे पर प्राप्त संख्या दूसरे पासे पर प्राप्त संख्या से कम है। 2
- (ख) $(P \wedge Q) \vee (P \rightarrow \sim R)$ के लिए सत्य सारणी लिखिए। 3
- (ग) जाँच कीजिए कि नीचे दिया हुआ ग्राफ हैमिल्टोनीय है या नहीं : 5



4. (क) निम्नलिखित कथन का निषेध, विलोम और प्रतिपरिवर्तित रूप लिखिए : 3
 “प्रत्येक संतत फलन समाकलनीय होता है।”
- (ख) यदि $F(z)$ अनुक्रम $\{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$ का जनक फलन है, तो अनुक्रम $\{0, a_1, 0, a_3, \dots\}$ का जनक फलन क्या है ? 3
- (ग) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक वृक्ष द्विभाजित होता है। क्या इसका विलोम भी सत्य है ? पुष्टि कीजिए। 4
5. (क) कथन “यदि m और n में कोई एक सम प्राकृतिक संख्या है, तो $m.n$ भी एक सम प्राकृतिक संख्या है।” की एक प्रत्यक्ष उपपत्ति कीजिए। 2
- (ख) $(1 + x^3 + 2x^{15})^{100}$ के प्रसार में x^{33} का गुणांक क्या है ? 3
- (ग) नीचे दिए हुए ग्राफ G के लिए $\delta(G), \Delta(G)$ और $\chi(G)$ ज्ञात कीजिए : 5



6. (क) शब्द “INTRODUCTION” के अक्षरों के कितने क्रमचय हैं, यदि सभी अक्षरों को सम्मिलित किया गया हो ? 2

(ख) मान लीजिए $f(n) = 4n^2 - 4n + 1$ और

$$g(n) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } n = 1 \\ g(n-1) + 8n - 8, & \text{यदि } n > 1 \end{cases}$$

हैं। गणितीय आगमन के सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए कि सभी $n \geq 1$ के लिए $f(n) = g(n)$ है। 3

(ग) पुनरावृत्ति संबंध : 5

$$a_n + a_{n-1} - 12a_{n-2} = 8 \cdot 3^n \quad (n \geq 2)$$

को हल कीजिए।

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए : 10

(क) 6 के विभाजनों की संख्या 11 है।

(ख) पुनरावृत्ति संबंध $a_n - 5a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$ का

$$\text{जनक फलन } \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-4)} \text{ है।}$$

(ग) कथन $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ का निषेध $(p \wedge q) \rightarrow r$ है।

(घ) ग्राफ $K_{5,6}$ हैमिल्टोनीय है।

(ङ) 20 शीर्षों और 18 कोरों वाले एक संबद्ध ग्राफ का अस्तित्व है।