No. of Printed Pages : 15 **MTE–11**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2023

MTE-11 : PROBABILITY AND STATISTICS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) Question No.* ***7*** *is compulsory.*

(ii) Attempt any ***four*** *questions from Question Nos.* ***1*** *to* ***6****.*

(iii) Symbols have their usual meanings.

(iv) Use of calculator is not allowed.

---

1. (a) The yield (in kg) of 100 plots in the form of grouped frequency distribution is given as follows : 5

Yield	**Frequency**
0 – 20	10
20 – 40	15
40 – 60	35
60 – 80	30
80 – 100	10

(i) Estimate the number of plots with a yield of more than 40.

(ii) Find mean and standard deviation of yield.

(b) What is the probability of drawing a king twice in succession from a deck of 52 cards if : 3

(i) the first card is replaced before the second draw ?

(ii) the first card is not replaced before the second draw ?

(c) If P(A) = 0.2, P(B) = 0.3 and $P(A \cup B) = 0.4$, then are A and B independent ? Justify. 2

2. (a) The first four moments of a distribution about any point A = 5 are 2, 20, 40 and 50. Find mean, variance, skewness and kurtosis of the distribution. 6

(b) The probability of a man hit a target is $\frac{1}{4}$. If he fires 7 times, then find the probabilities that : 4

(i) he will hit the target twice.

(ii) he will not hit the target.

3. (a) Let $X_1, X_2, ..., X_n$ be a random sample taken from a distribution with density function :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}; & \theta > 0, \text{ if } x > 0 \\ 0 & ; \text{ otherwise} \end{cases}$$

Show that $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ is an unbiased estimator for θ. 4

(b) For the given bivariate probability distribution of X and Y :

$$P[X = x, Y = y] = \frac{x^2 + y}{32}$$

for $x = 0, 1, 2, 3$ and $y = 0, 1$

Find : 6

(i) $P[X \le 1, Y = 1]$

(ii) $P[X \le 1]$

(iii) $P[Y > 0]$ and

(iv) $P[Y = 1 \mid X = 3]$

4. (a) Let X be a continuous random variable with the probability density function :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{9}; & 0 < x < 3 \\ 0 \; ; & \text{otherwise} \end{cases}$$

Then find the upper bound of $P[|X-2|>1]$ using Chebyshev's inequality. 5

(b) If X is a Poisson variate such that : 2

$$P\,[X = 2] = 3P\,[X = 4]$$

then find variance of X.

(c) If the moment generating function (m.g.f.) of a random variable X is : 3

$$M_X(t) = \exp\,(3t + 32t^2)$$

then find mean and S.D. of X.

5. (a) Let $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ be a random sample of size n from a distribution with p.d.f. : 4

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}; & \theta > 0, 0 < x < 1 \\ 0 \;\; ; & \text{otherwise} \end{cases}$$

Obtain maximum likelihood estimator of θ.

(b) The lifetime of a certain kind of battery has a mean life of 400 hours and standard deviation as 45 hours. Assuming the distribution of lifetime to be normal, find : 4

(i) The percentage of batteries with a lifetime more than 470 hours.

(ii) The proportion of batteries with a lifetime 385 and 415 hours.

Given :

$$\phi\,(1.55) = 0.9394$$
$$\phi\,(0.33) = 0.6293$$

(c) Suppose X denotes the lifetime of a bulb and X has density function :

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x}; & x \geq 0 \\ 0\;; & \text{otherwise} \end{cases}$$

Find k. 2

6. (a) The grades of students in a course for a particular semester were as follows : 5

Grade	No. of Students
A+	14
A	18
B+	32
B	20
C+	16
C	20

Test the hypothesis that distribution of grades is uniform at 5% level of significance.

[You may use the following values : $\chi^2_{(4,0.05)} = 9.488$, $\chi^2_{(5,0.05)} = 11.070$]

(b) If $x \geq 1$ is the critical region for testing $H_0 : \theta = 2$ against $H_1 : \theta = 1$ on the basis of a single observation from : 4

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}; & x \geq 0 \\ 0 \;; & \text{otherwise} \end{cases}$$

Then find probabilities of type I and type II errors.

(c) Write properties of good estimator. 1

7. Which of the following statements are True *or* False ? Give a short proof or a counter-example in support of your answer : 5×2=10

(i) If the correlation coefficient between X and Y is 0.75, then the correlation coefficient between $(2 - 5x)$ and $(5 + 2y)$ is -0.75.

(ii) If $P(A) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.7$ and A and B are independent events, then $P(B) = \frac{1}{2}$.

(iii) The abscissa of the point of intersection of 'less than' and 'more than' ogives gives the mean of the data.

(iv) In a problem of testing of hypothesis against a simple alternative, if the probability of type II error to be 0.05, then power of the test will be 0.05.

(v) If X and Y are independent random variables, then the m.g.f :

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) + M_Y(t)$$

MTE-11

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2023

एम.टी.ई.-11 : प्रायिकता और सांख्यिकी

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i) प्र. सं. **7** अनिवार्य है।*

*(ii) प्रश्न संख्या **1** से **6** में से कोई **चार** प्रश्न कीजिए।*

(iii) सभी प्रतीकों के अर्थ सामान्य हैं।

(iv) कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) 100 प्लॉट की पैदावार (kg में) सामूहिक बारम्बारता बंटन में निम्नलिखित है : 5

पैदावार	**बारम्बारता**
0 – 20	10
20 – 40	15
40 – 60	35
60 – 80	30
80 – 100	10

(i) 40 से अधिक पैदावार वाले प्लॉटों की संख्या आकलित कीजिए।

(ii) पैदावार का माध्य और मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

(ख) 52 ताशों की एक गड्डी में से एक के बाद एक दो बादशाह निकाले जाने की वह प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि : 3

(i) दूसरे पत्ते का निकालने से पहले पहला पत्ता प्रतिस्थापित किया गया।

(ii) दूसरे पत्ते को निकालने से पहले पहला पत्ता प्रतिस्थापित नहीं किया गया।

(ग) यदि $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$ और $P(A \cup B) = 0.4$ है, तो क्या A और B स्वतंत्र हैं ? स्पष्ट कीजिए। 2

2. (क) किसी बिन्दु $A = 5$ के परितः एक बंटन के प्रथम चार आघूर्ण क्रमशः 2, 20, 40 और 50 हैं। बंटन का माध्य, प्रसरण, विषमता और कुकुदता ज्ञात कीजिए। 6

(ख) एक आदमी के एक लक्ष्य पर निशाना लगाने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है। यदि वह 7 बार दागता है, तो वह प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि : 4

(i) वह दो बार लक्ष्य पर दागेगा।

(ii) वह लक्ष्य पर नहीं दागेगा।

3. (क) मान लीजिए कि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ एक बंटन से लिया गया यादृच्छिक प्रतिदर्श है, जिसका घनत्व फलन निम्नलिखित है :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}; & \theta > 0, \text{ यदि } x > 0 \\ 0 \quad ; & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

दर्शाइए कि θ के लिए $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ एक अनभिनत आकलक है। 4

(ख) X और Y के लिए द्विचर प्रायिकता बंटन निम्नलिखित है :

$$P[X = x, Y = y] = \frac{x^2 + y}{32}$$

$x = 0, 1, 2, 3$ और $y = 0, 1$ के लिए

निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए : 6

(i) $P[X \leq 1, Y = 1]$

(ii) $P[X \leq 1]$

(iii) $P[Y > 0]$ और

(iv) $P[Y = 1 \mid X = 3]$

4. (क) मान लीजिए X एक सतत् यादृच्छिक चर है जिसका प्रायिकता घनत्व फलन निम्नलिखित है :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{9}; & 0 < x < 3 \\ 0\ ; & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

शेबोशेव असमिका का प्रयोग करके $P[|X - 2| > 1]$ का उपरि परिबंध निकालिए। 5

(ख) यदि X एक प्वॉयसां चर है जिसके लिए $P [X = 2] = 3P [X = 4]$, तो X का प्रसरण ज्ञात कीजिए। 2

(ग) यदि एक यादृच्छिक चर (X) का आघूर्ण जनक फलन (m.g.f.) $M_X(t) = \exp(3t + 32t^2)$ है, तो X का माधय एवं S.D. ज्ञात कीजिए। 3

5. (क) मान लीजिए $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ एक बंटन से n आमाप वाला यादृच्छिक प्रतिदर्श है, जिसका p.d.f. निम्नलिखित है : 4

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}; & \theta > 0, 0 < x < 1 \\ 0 \; ; & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

θ का अधिकतम सम्भावित आकलक ज्ञात कीजिए।

(ख) एक विशेष प्रकार की बैटरी के जीवनकाल का माध्य 400 hours और मानक विचलन 45 hours है। मान लीजिए कि जीवनकाल का बंटन प्रसामान्य है, तो निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए : 4

(i) 470 hours से अधिक जीवनकाल वाली बैटरियों की प्रतिशतता

(ii) जीवनकाल 385 hours और 415 hours वाली बैटरियों का समानुपात

[दिया है : $\phi(1.55) = 0.9394$, $\phi(0.33) = 0.6293$]

(ग) मान लीजिए कि एक बल्ब का जीवनकाल X से निरूपित होता है तथा X का घनत्व फलन निम्नलिखित है :

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x}; & x \geq 0 \\ 0 \ ; & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

k का मान ज्ञात कीजिए। 2

6. (क) एक विशेष सेमेस्टर में विद्यार्थियों के ग्रेड निम्नलिखित हैं : 5

ग्रेड	**विद्यार्थियों की संख्या**
A^+	14
A	18
B^+	32
B	20
C^+	16
C	20

परिकल्पना "ग्रेड का बंटन एकसमान है" का परीक्षण 5% सार्थकता स्तर पर कीजिए।

[आप निम्नलिखित मानों का प्रयोग कर सकते हैं :

$\chi^2_{(4,0.05)} = 9.488$, $\chi^2_{(5,0.05)} = 11.070$]

(ख) यदि :

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}; & x \geq 0 \\ 0 \;\;; & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

से लिए गए एक प्रेक्षण पर आधारित परिकल्पना $H_1 : \theta = 2$ के विरुद्ध $H_1 : \theta = 1$ के परीक्षण के लिए $x \geq 1$ क्रान्तिक प्रदेश है, तो प्रकार I और प्रकार II त्रुटि ज्ञात कीजिए। 4

(ग) अच्छे आकलक के गुणधर्म लिखिए। 1

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तर के पक्ष में संक्षिप्त उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए : 5×2=10

(i) यदि X और Y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक 0.75 है, तो $(2 - 5x)$ और $(5 + 2y)$ के बीच सहसम्बन्ध गुणांक -0.75 होगा।

(ii) यदि $P(A) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.7$ और A और B स्वतन्त्र घटनाएँ हैं, तो $P(B) = \frac{1}{2}$ होगा।

(iii) 'से कम' और 'से अधिक' तोरण वक्रों के प्रतिच्छेदन बिन्दु का भुजांक माध्य होता है।

(iv) एक सरल वैकल्पिक परिकल्पना के विरुद्ध परिकल्पना के परीक्षण की समस्या में, यदि प्रकार II त्रुटि की प्रायिकता 0.05 है,तो परीक्षण की क्षमता 0.05 होगी।

(v) यदि X और Y स्वतंत्र यादृच्छिक चर हैं, तो इनका m.g.f. $M_{X+Y}(t) = M_X(t) + M_Y(t)$ होगा।