No. of Printed Pages : 8

MTE–08

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2023

MTE-08 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : (*i*) *Question No. **1** is compulsory.*

(*ii*) *Answer any **four** questions from the remaining Question Nos. **2** to **7**.*

(*iii*) *Use of calculator is not allowed.*

---

1. State whether the following statements are True *or* False. Justify your answer with the help of a short proof or a counter-example :

$2\times5=10$

(i) The solution of initial value problem :

$$\frac{dy}{dx}=y \text{ with } y(0)=1$$

exists and is unique.

(ii) The orthogonal trajectories of all the parabolas with vertices at the origin and foci on the x-axis is $y^2 + 2x^2 = c$.

(iii) $x^2 (dx)^2 + y^2 (dy)^2 + z^2 (dz)^2 + 2xy\, dx\, dy = 0$ is a first order, first degree differential equation.

(iv) The partial differential equation $u \dfrac{\partial u}{\partial x} = e^y + \sin x,\ u = u(x, y)$ is quasi-linear.

(v) The partial differential equation :

$$\left(x^2 - 1\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

is elliptic for all (x, y) inside the circle $x^2 + y^2 = 1$.

2. (a) Solve : 4

$$x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0$$

(b) Solve : 6

$$\left(y^2 + yz\right) dx + \left(z^2 + zx\right) dy + \left(y^2 - xy\right) dz = 0$$

3. Using the transformation $x^2 = \mathrm{X}, y^2 = \mathrm{Y}$ reduce the p. d. e. $x^2 q^2 \left(x^2 + y^2\right) - p^2 q^2 - x^2 y^2 = 0$ to a form $f(\mathrm{P}, \mathrm{X}) = g(\mathrm{Q}, \mathrm{Y})$, where $\mathrm{P} = \dfrac{\partial z}{\partial x}, \mathrm{Q} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$. Obtain the complete integral of the resulting equation. 10

4. (a) Use the method of variation of parameters to solve the equation : 5

$$(D^2 - 2D)\,y = e^x \sin x$$

(b) Find the integral surface of the p. d. e. :

$$x^2 p + y^2 q + z^2 = 0,$$

which passes through the hyperbola $xy = x + y,\ z = 1$. 5

5. (a) Solve the equation : 4

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{x}{1-x^2}\right) y = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 1$$

(b) A tightly stretched string with fixed end points $x = 0$ and $x = l$ is initially in a position given by $y = y_0 \sin^3\left(\frac{\pi x}{l}\right)$. If it is released from rest from this position, then formulate the problem to find the displacement $y(x, t)$. 6

6. (a) Find a particular integral of : 3

$$\left(D^2 - DD' - 2D'^2 + 2D + 2D'\right) z = e^{2x+3y}$$

(b) Solve the following differential equation by reducing it to normal form using change of dependent variable : 7

$$x\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+\left(1+\frac{2}{x^2}\right)xy=x^2e^x,\ x\neq 0$$

7. (a) Solve : 5

$$(D-3D'-2)^2 z=2e^{2x}\sin(2y+x)$$

(b) Solve the differential equation : 5

$$\left(D^4-a^4\right)y=x^4+\sin bx,\ a \text{ and } b \text{ constants.}$$

MTE–08

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2023

एम.टी.ई.-08 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : (*i*) *प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है।*

(ii) प्रश्न सं. 2 से 7 तक किन्हीं **चार** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

(iii) कैल्कुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं **या** असत्य। संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रति–उदाहरण से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए : 2×5=10

(i) आदिमान समस्या $\frac{dy}{dx} = y,\ y(0) = 1$ के हल का अस्तित्व है और वह अद्वितीय है।

(ii) मूलबिन्दु पर शीर्ष और x–अक्ष पर नाभि वाले सभी परवलयों का लांबिक प्रक्षेप–पथ $y^2+2x^2=c$ है।

(iii) $x^2(dx)^2+y^2(dy)^2+z^2(dz)^2+2xy\,dx\,dy=0$ प्रथम कोटि एकघातीय अवकल समीकरण है।

(iv) आंशिक अवकल समीकरण :

$$u\frac{\partial u}{\partial x}=e^y+\sin x,\ u=u(x,y)$$

रैखिककल्प है।

(v) आंशिक अवकल समीकरण :

$$\left(x^2-1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

वृत्त $x^2+y^2=1$ के अंदर सभी (x,y) पर दीर्घवृत्तीय है।

2. (क) हल कीजिए : 4

$$x^2p^2+xyp-6y^2=0$$

(ख) हल कीजिए : 6

$$\left(y^2+yz\right)dx+\left(z^2+zx\right)dy+\left(y^2-xy\right)dz=0$$

3. रूपांतरण $x^2 = X, y^2 = Y$ का प्रयोग करके आंशिक अवकल समीकरण :

$$x^2q^2\left(x^2+y^2\right)-p^2q^2-x^2y^2=0$$

को $f(P, X) = g(Q, Y)$ के रूप में समानीत कीजिए, जहाँ $P = \frac{\partial z}{\partial x}, Q = \frac{\partial z}{\partial y}$ हैं। परिणामी समीकरण का पूर्ण समाकल प्राप्त कीजिए। 10

4. (क) समीकरण $\left(D^2 - 2D\right)y = e^x \sin x$ को प्राचल विचरण विधि से हल कीजिए। 5

(ख) आंशिक अवकल समीकरण :

$$x^2p + y^2q + z^2 = 0$$

का वह समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिए जो अतिपरवलय $xy = x + y,\ z = 1$ से गुजरता है। 5

5. (क) समीकरण 4

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{x}{1-x^2}\right)y = x\sqrt{y},\ y(0)=1$$

को हल कीजिए।

(ख) स्थिर अंत्य बिन्दुओं $x = 0$ और $x = l$ वाली एक दृढ़तः खींची हुई डोरी की प्रारंभिक स्थिति $y = y_0 \sin^3\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ है। यदि यह इस स्थिति से विरामावस्था से छोड़ दी जाती है, तो विस्थापन $y(x,t)$ ज्ञात करने के लिए समस्या निरूपित कीजिए। 6

6. (क) $\left(D^2 - DD' - 2D'^2 + 2D + 2D'\right)z = e^{2x+3y}$ का एक विशेष समाकल ज्ञात कीजिए। 3

(ख) आश्रित चर परिवर्तन करके निम्नलिखित अवकल समीकरण को प्रसामान्य रूप में समानीत करके हल कीजिए : 7

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)xy = x^2e^x, \; x \neq 0$$

7. (क) हल कीजिए : 5

$$(D - 3D' - 2)^2 z = 2e^{2x} \sin(2y + x)$$

(ख) अवकल समीकरण : 5

$$\left(D^4 - a^4\right)y = x^4 + \sin bx$$

को हल कीजिए, जहाँ a एवं b अचर हैं।